

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

OHAYON Roger Jean



1^{re} THÈSE : Etude du problème de la plaque trouée pour un matériau de type élasto-plastique à écrouissage non linéaire.

2^e THÈSE : Entraînement d'un fluide visqueux par les vibrations d'une lame flexible.

Soutenues le 17 juin 1971 devant la Commission d'examen.

MM. R. MAZET Président

J.P. GUIRAUD
G. COUPRY } Examineurs.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

OHAYON Roger Jean



1^{re} THÈSE : Etude du problème de la plaque trouée pour un matériau de type élasto-plastique à écrouissage non linéaire.

2^e THÈSE : Entraînement d'un fluide visqueux par les vibrations d'une lame flexible.

Soutenues le 17 juin 1971 devant la Commission d'examen.

MM. R. MAZET Président

J.P. GUIRAUD

G. COUPRY

Examineurs.

O. N. E. R. A.
29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON

1971



Je voudrais exprimer ici mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé et conseillé tout au long de ce travail.

*Ma reconnaissance va d'abord à Monsieur le Professeur **R. Mazet** qui m'a initié à la Mécanique des Solides et qui m'a permis de préparer cette thèse dans les meilleures conditions à l'O.N.E.R.A.*

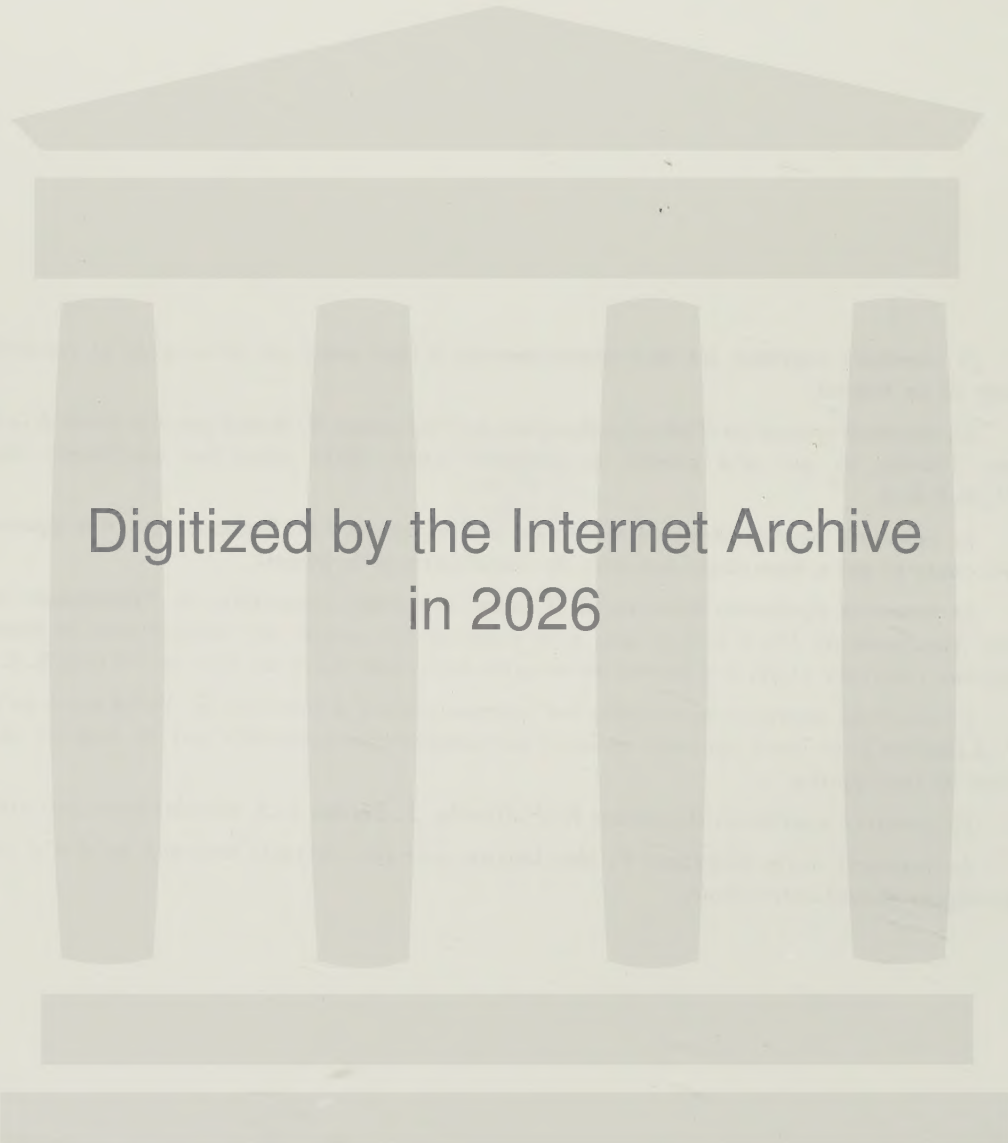
*Je remercie particulièrement Monsieur le Professeur **J.P. Guiraud** dont j'ai également suivi les cours et qui a bien voulu accepter de s'intéresser à ce travail.*

*Je remercie également Monsieur **G. Coupry**, Directeur Scientifique du Département Résistance des Structures de l'O.N.E.R.A. qui, à la suite de ses cours, m'a orienté vers la Mécanique des Milieux Continus et qui m'a permis de mener à bien cette thèse au sein de l'O.N.E.R.A.*

*Je voudrais exprimer aussi toute ma reconnaissance à Monsieur **R. Valid** ainsi qu'à Monsieur **J. Lemaître** pour leurs conseils et leurs encouragements constants tout au long de ce travail au sein de leur équipe.*

*Je remercie également Messieurs **H. Policella**, **J. Bordas** et **J. Nicolas** pour leur aide efficace.*

*Je remercie enfin Monsieur **Y. Morchoisne** pour les conseils amicaux qu'il n'a cessé de me prodiguer durant cette étude.*



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556001_0018

TABLE DES MATIÈRES

Résumé - Summary	2
Introduction	3
I. Etat de la question	3
I,1. Solution élastique	3
I,2. Etat de la question en élasto-plasticité	5
I,2.1. Travaux de Cherepanov	5
I,2.2. Cas d'un matériau écrouissable	6
I,2.3. Conclusion	9
II. Pose du problème	9
II,1. Description de la structure	9
II,2. Hypothèses générales	10
II,3. Etude des conditions aux limites	13
II,3.1. Sur le bord du trou	13
II,3.2. Sur la frontière extérieure	14
II,4. Etude des équations d'équilibre	14
II,5. Etude de la compatibilité des déformations	15
III. Méthode de résolution	16
III,1. Etude des déplacements	16
III,2. Etude des contraintes	17
III,3. Etude des conditions aux limites	19
III,4. Résumé synoptique du processus adopté	20
III,5. Exemple d'application en élasticité	21
IV. Loi de comportement élasto-plastique	22
IV,1. Hypothèses générales	23
IV,2. Détermination de la fonction $f(S_2)$	24
IV,3. Questions d'isotropie	25
V. Résolution élasto-plastique du problème	28
VI. Confrontation théorie-expérience	32
VI,1. Détermination des paramètres d'écrouissage du matériau	32
VI,2. Etude des conditions aux limites	33
VI,2.1. En élasticité	33
VI,2.2. En élasto-plasticité	34
VI,3. Confrontation théorie-expérience	35
VI,4. Remarques	37
VII. Contraintes résiduelles	37
Conclusion	40
Annexe I	41
Annexe II	43
Références	45



CONTRAINTES ET DÉFORMATIONS ÉLASTOPLASTIQUES DANS UNE PLAQUE TROUÉE

par Roger OHAYON

RÉSUMÉ

On se propose de déterminer en tenant compte de la plasticité le champ de contrainte et de déformation au voisinage du point le plus chargé d'une éprouvette plate rectangulaire trouée (orifice central circulaire). La méthode de résolution employée est une méthode « mixte » qui a l'avantage d'introduire à la fois un champ de contrainte et un champ de déformation posés a priori. Ces champs sont définis par des développements en séries trigonométriques tronqués dont les coefficients sont des fonctions qui sont déterminées par la résolution d'un système d'équations différentielles linéaires et homogènes du premier ordre à coefficients non constants. La loi de comportement adoptée est du type Prandtl-Reuss à écrouissage isotrope.

Descripteurs (thésaurus CEDOCAR) : Elastoplasticité – Fluage – Plaques – Corps rectangulaires – Orifices.



ELASTOPLASTIC STRESSES AND DEFORMATIONS IN A PERFORATED PLATE

SUMMARY

The stress and strain fields near the point of maximum load in a perforated plate (circular central hole) is determined, taking into account plasticity effects. The method used is the 'mixed' type which has the advantage of introducing together predetermined stress and strain fields. These fields are defined by trigonometric truncated series, in which the unknown coefficients are functions which are solutions of a linear and homogeneous system of differential equations of first order with non constant coefficients. The stress-strain relation adopted here is of Prandtl-Reuss type with isotropic work hardening.

Descriptors (NASA thesaurus) : Elastoplasticity – Creep properties – Plates (structural members) – Perforated plates – Flat plates – Rectangular plates – Work hardening – Nonlinearity.



INTRODUCTION

Les éléments métalliques intervenant dans la construction aéronautique comportent dans la plupart des cas des discontinuités de forme : trous, entailles, variations de section.

La résistance de ces éléments est conditionnée par un phénomène très important qui apparaît lors de chargements variables : celui de la fatigue.

Le phénomène a été largement étudié sur des éprouvettes lisses, mais le passage aux éléments plus complexes, tels qu'éprouvettes entaillées, s'est heurté à de très grandes difficultés du fait, en partie, de l'ignorance de la répartition du champ de contraintes à l'intérieur de telles pièces.

D'autre part, les problèmes de poids étant primordiaux dans l'industrie aéronautique, les constructeurs visent à faire travailler les matériaux au maximum de leurs possibilités.

Or des facteurs de concentration de contraintes importants, ne serait-ce que dans le problème de la plaque trouée qui nous préoccupe ici, entraînent rapidement le dépassement de la limite élastique dans des régions importantes de ces structures.

L'étude en fatigue de ces éléments doit donc comporter avant tout une connaissance précise des champs de contraintes et de déformations au-delà de la limite élastique et principalement dans les zones de concentration de contraintes.

Il sera alors peut-être possible d'utiliser ces résultats en fatigue. Une tentative a déjà été faite dans ce sens [1].

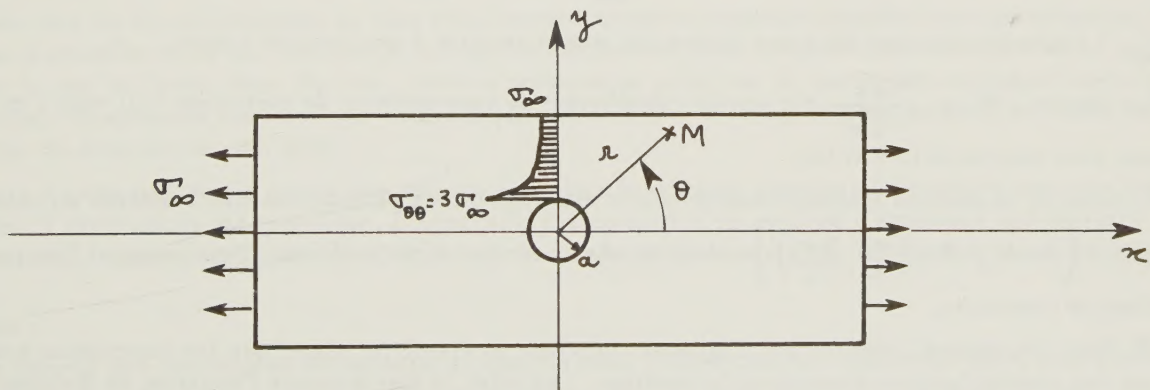
Le présent travail se propose de montrer et de justifier une méthode de calcul adaptée à ce genre de problèmes en tenant compte de l'écrouissage du matériau au travers d'une loi de comportement plastique du type Prandtl-Reuss.

Un paragraphe spécial est consacré aux contraintes résiduelles : dans les éprouvettes lisses elles existent sous forme microscopique, dans les éprouvettes entaillées elles apparaissent sous forme macroscopique.

Une confrontation théorie-expérience est ensuite présentée. Les résultats obtenus sont en bon accord avec l'expérience.

I. ÉTAT DE LA QUESTION

I,1. Solution élastique



Nous ne nous étendons pas sur la méthode de résolution qui est classique et qui figure dans la majorité des ouvrages d'élasticité (Muskhelishvili [2], Solomon [3]).

En contraintes planes, en utilisant les méthodes de variables complexes on obtient, pour une plaque mince de dimension infinie, soumise à une traction à l'infini, et possédant un orifice central libre de forces extérieures,

la solution suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \frac{\sigma_{\infty}}{2} \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\infty}}{2} \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_{r\theta} = - \frac{\sigma_{\infty}}{2} \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) \sin 2\theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{\infty}}{2E} \left\{ \left[(1-\nu) - (1+\nu) \frac{a^2}{r^2} \right] + \left[\left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) + \nu \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \right] \cos 2\theta \right\} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\infty}}{2E} \left\{ \left[(1-\nu) + (1+\nu) \frac{a^2}{r^2} \right] - \left[\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) + \nu \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \right] \cos 2\theta \right\} \\ \varepsilon_{r\theta} = - \frac{\sigma_{\infty}}{2E} \left[\left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) + \nu \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) \right] \sin 2\theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = \frac{\sigma_{\infty}}{2E} \left\{ \left[(1-\nu)r + (1+\nu) \frac{a^2}{r} \right] + \left[\left(r + \frac{4a^2}{r} - \frac{a^4}{r^3}\right) + \nu \left(r - \frac{a^4}{r^3}\right) \right] \cos 2\theta \right\} \\ u_{\theta} = - \frac{\sigma_{\infty}}{2E} \left[\left(r + \frac{2a^2}{r} - \frac{a^4}{r^3}\right) + \nu \left(r - \frac{2a^2}{r} - \frac{a^4}{r^3}\right) \right] \sin 2\theta \end{array} \right.$$

Remarques

A. Un calcul facile montre que les points où les contraintes sont maximales, sont situés sur le bord du trou et ont pour coordonnées :

$$\left(r = a, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right).$$

En ces points :

$$(1) \quad \sigma_{\theta\theta} = 3 \sigma_{\infty}$$

σ_{∞} : contrainte existant dans une plaque non trouée soumise à une traction simple.

Le rapport $K = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_{\infty}}$ est appelé "coefficient de concentration de contrainte". Il vaut 3 en élasticité comme nous venons de le voir (1).

L'étude de la solution élastique montre que le trou apporte une perturbation **très localisée** au voisinage des points $\left[r = a, \theta = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \right]$ dans un champ de contrainte uniforme. C'est pourquoi l'on parle de fort gradient de contrainte.

B. Nous constatons, comme c'est d'ailleurs classique en élasticité plane, que les contraintes sont indépendantes des caractéristiques élastiques du matériau : en effet, il faut résoudre l'équation de Beltrami :

$$\Delta(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad \text{et les équations d'équilibre. Si de plus les conditions aux limites portent sur les}$$

forces, on a la propriété énoncée. C'est cette remarque qui est d'ailleurs à l'origine de la photo-élasticimétrie. Nous nous en servons (voir chapitre confrontation théorie-expérience) dans l'étude expérimentale des conditions aux limites en élasticité.

En élasto-plasticité avec écrouissage les contraintes ne sont plus déterminées indépendamment des déformations, et la propriété n'est plus vraie.

1.2. Etat de la question en élasto-plasticité

Les travaux effectués en mécanique des solides sur le problème de la plaque trouée portent généralement sur des matériaux dont le comportement physique non linéaire peut être gouverné par des lois du type élastique parfaitement plastique.

1.2.1. Travaux de Cherepanov [4], [5]

Parmi les mémoires les plus significatifs figurent ceux de **G. P. Cherepanov** qui sont rappelés dans la monographie très complète de **G.N. Savin** [6] et qui traitent de la résolution de certains problèmes élasto-plastiques avec des frontières de séparation inconnues.

Une des propriétés remarquables d'un problème bidimensionnel (contraintes planes) de plasticité parfaite est que le système d'équations formé par les deux équations d'équilibre et la condition de plasticité (critère de Tresca ou de von Mises en isotrope) est « fermé ». C'est-à-dire que si de plus, on ne se donne que des conditions aux limites du type force, le problème est statiquement déterminé. On obtient les contraintes dans la zone plastique (adjacente aux frontières extérieures ou intérieures du corps) indépendamment des déformations et sans avoir besoin de connaître la frontière de séparation entre le domaine élastique et le domaine plastique.

La difficulté du problème réside dans la détermination des contraintes dans la zone élastique car il faut satisfaire aux conditions aux limites (continuité des contraintes à la frontière élasto-plastique) sur un contour a priori inconnu.

Cherepanov a résolu cette question en examinant le cas d'une plaque mince soumise à une traction à l'infini et possédant un orifice circulaire central sur le contour duquel est appliquée une pression constante. Le critère de plasticité adopté est celui de Tresca et la résolution du problème a été menée en appliquant dans la zone élastique les méthodes classiques de variables complexes (Muskhelishvili).

Compte tenu du procédé analytique de résolution dans le plan complexe (à l'aide de la transformation conforme faisant passer de l'extérieur du contour élasto-plastique à l'extérieur du cercle unité du plan complexe) l'auteur ne trouve de solution que pour les valeurs des paramètres de charge pour lesquelles la zone plastique entoure complètement le trou.

Il faut de plus que lors de l'évolution de ces paramètres, les frontières successives ne se chevauchent pas. Autrement dit, il n'y a pas de décharge (élastique) dans le domaine plastique quand on fait croître les forces extérieures.

Dans le cas qui nous intéresse, l'orifice est libre et les zones de fortes concentrations de contraintes sont très localisées et, par conséquent, il est à prévoir que les zones plastiques sont très localisées elles aussi et que nous n'aurons peut-être un domaine plastifié entourant complètement le trou que pour des déformations déjà assez importantes (cas dans lequel l'hypothèse des petites déformations n'est pas valable).

En fait une loi de comportement du type élastique-parfaitement plastique constitue une approximation d'une précision discutable en ce qui concerne le calcul des contraintes. Une exception peut être faite en ce qui concerne le cas de l'acier doux. En effet, celui-ci présente un palier sur la courbe d'écrouissage (contrainte-déformation). Remarquons toutefois que ce palier peut caractériser un comportement instable de l'acier dans le domaine de déformation considéré.

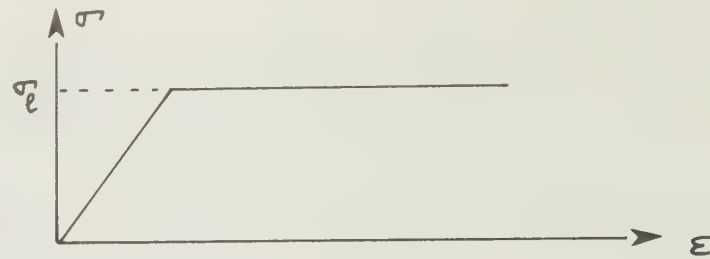
Notons d'autre part que le calcul des déformations dans le domaine plastique (nécessaire pour une confrontation avec l'expérience) est compliqué. Il nécessite l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles avec, comme conditions initiales, la continuité des déplacements sur la frontière élasto-plastique.

Remarque :

Si le tenseur des contraintes est uniaxial au bord du trou, c'est-à-dire si l'orifice est libre, connaissant la contrainte théorique au bord, on pourrait penser se reporter sur la courbe contrainte-déformation pour connaître cette dernière. Cela n'est pas possible, car un inconvénient majeur présenté par une loi du type élastique-parfaitement plastique est l'absence de correspondance biunivoque entre contraintes et déformations.

Dans l'étude qui nous préoccupe ici, une méthode analogue à celle employée par Cherepanov n'aurait pu s'appliquer. En effet, d'une part – comme nous l'avons déjà mentionné – une des hypothèses fondamentales

du calcul est que la zone plastique entoure complètement le trou, ce qui ne se produira que pour des déformations très grandes, et d'autre part, la plus grande partie des matériaux métalliques intéressant l'industrie aérospatiale (alliages d'aluminium : AU4G, AU2GN, etc.) présentent de l'écrouissage à température ambiante (environ 20°C).



1.2.2. Cas d'un matériau écrouissable

Cette fois-ci, le problème n'est plus statiquement déterminé en ce qui concerne les contraintes dans le domaine plastique : nous devons utiliser les relations contraintes-déformations, c'est-à-dire la loi de comportement du matériau. Très peu de travaux ont été effectués sur la question.

a) Etude de E.Z. Stowell [7]

L'auteur détermine les champs de contraintes et de déformations au voisinage du point le plus chargé d'une plaque mince infinie trouée et soumise à une traction dans son plan.

Les hypothèses du calcul sont les suivantes :

- Milieu homogène et isotrope.
- Hypothèse des petites déformations.
- Milieu incompressible ($\nu = \frac{1}{2}$, ν : coefficient de Poisson élastique).
- La loi de comportement utilisée est du type entière (Hencky-Mises). Elle est exprimée sous la forme :

$$(1) \quad \epsilon = \frac{1}{E_s} \left[\frac{3}{2} \sigma - \frac{1}{2} T_1(\sigma) \mathbb{1} \right]$$

σ : tenseur des contraintes;

ϵ : tenseur des déformations;

E_s : module sécant (fonction du point).

Remarque :

La loi de Hencky-Mises, se mettant sous la forme :

$$\epsilon^p = f(S_2) \mathbb{D}$$

avec ϵ^p : tenseur des déformations plastiques;

$\mathbb{D}$: déviateur des contraintes, $\mathbb{D} = \sigma - \frac{T_1(\sigma)}{3} \mathbb{1}$

S_2 : second invariant du déviateur $\mathbb{D}$, $S_2 = \frac{1}{2} T_2(\mathbb{D}^2)$ on trouve finalement la relation entre la fonction $f(S_2)$ et le module sécant E_s :

avec $\nu = \frac{1}{2}$, on a :

$$\frac{1}{E_s} = \frac{1}{E} + \frac{2}{3} f(S_2)$$

E : module d'Young du matériau.

Avec un état de contrainte uniaxial on aurait :

$$\epsilon_{11} = \left[\frac{1}{E} + \frac{2}{3} f\left(\frac{\sigma_{11}^2}{3}\right) \right] \sigma_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_s}$$

ce qui permet de déterminer la fonction f par un essai expérimental de traction simple.

La méthode employée par Stowell consiste à postuler que les contraintes en plasticité sont obtenues à partir des formules connues donnant les contraintes en élasticité, en introduisant dans celles-ci une fonction de $\frac{E_s(M)}{E}$ (M : point courant) : $G\left(\frac{E_s}{E}\right)$. On a évidemment : $G(1) = 1$ afin de retrouver la solution élastique. D'autre part, le facteur de concentration de contrainte tendant vers 1, nous

avons : $G(0) \rightarrow 0$ quand $\frac{E_s(M^*)}{E} \rightarrow 0$

(M* : point le plus chargé, c'est-à-dire au bord du trou sur l'axe perpendiculaire à la direction du chargement).

L'auteur estime que les équations d'équilibre seront satisfaites en moyenne (en portant l'expression des contraintes dans celles-ci) en rendant l'expression :

$$\int_0^1 \left[\frac{dG}{d\left(\frac{E_s}{E}\right)} \right]^2 d\left(\frac{E_s}{E}\right)$$

minimale, ce qui donne compte tenu des conditions aux limites imposées à G :

$$G\left(\frac{E_s}{E}\right) = \frac{E_s}{E}.$$

En fait, les équations d'équilibre ne sont satisfaites que de façon très grossière.

Pour trouver le facteur de concentration de contrainte, on utilise la courbe d'écrouissage du matériau qui donne l'expression de $\frac{E_s}{E}$ en fonction de σ au point le plus chargé.

Ayant une autre relation entre σ et $\frac{E_s}{E}$ (puisque la fonction G a été déterminée), l'auteur obtient une relation du type :

$$\sigma = f^p(\sigma)$$

qu'il résoud par itération. Les déformations sont déterminées ensuite en utilisant la loi de comportement (1). (p. 6).

Critique de la méthode : L'auteur détermine donc le champ de contrainte uniquement à l'aide de la solution élastique, des équations d'équilibre et de la courbe d'écrouissage. En fait, comme on part d'un champ de contrainte posé a priori, il faut s'assurer aussi que par l'intermédiaire de la loi de comportement les équations de compatibilité en ϵ sont satisfaites. Dans le cas présent, elles ne le sont pas du tout. D'autre part, les équations d'équilibre elles-mêmes ne sont satisfaites que de façon extrêmement approximative et l'auteur attribue les erreurs entre la théorie et l'expérience par le fait que les équations de la mécanique des milieux continus n'ont pas été satisfaites, que le coefficient de Poisson ν a été pris égal à 1/2, et que l'emploi d'une loi entière ne se justifie que dans le cas d'un chargement simple, c'est-à-dire si en tout point du corps on a :

$$\sigma(M, t) = \lambda(t) \sigma^*(M)$$

t : variable repérant les états successifs du corps.

Les erreurs relatives sont de l'ordre de 20% en déformation au point le plus chargé dans le cas du matériau considéré par Stowell, et de l'ordre de 30 à 40% pour des matériaux présentant une courbe d'écrouissage assez arrondie, d'après d'autres publications mentionnant le travail de Stowell. L'AU2GN recuit considéré dans notre étude possède une courbe d'écrouissage très arrondie.

Cette méthode a donné lieu à une formule empirique (travaux de Hardrath et Ohman [8]) permettant l'extension au cas d'entailles de formes quelconques mais qui ne repose sur aucun modèle théorique.

Le cas de cycles de chargement a été envisagé par Crews [9] sur la base des facteurs de concentration de contrainte élastique donnés par Neuber [10].

b) Etude de B. Budiansky et R.J. Vidensek [11]

Un autre travail plus intéressant que le précédent a été mené par **Budiansky** et **Vidensek** sur le même problème.

La loi de comportement est la même mais le milieu n'est plus supposé incompressible en élastique ($\nu \neq \frac{1}{2}$).

La fonction $f(\Sigma_2)$ a été déterminée en prenant en uniaxial la formule dite de **Ramberg** et **Osgood** :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^{n-1} \right]$$

σ_1 : valeur de la contrainte correspondant, sur la courbe d'écrouissage, au point où $E_s = 0,7 E$.

n : paramètre à déterminer afin d'ajuster au mieux la courbe théorique sur la courbe expérimentale.

Remarque :

Les auteurs ont signalé toutefois que cette formule ne pouvait rendre compte de la courbe d'écrouissage du matériau utilisé par **Stowell** et c'est la raison pour laquelle ils ne présentent pas de confrontation expérimentale. Elle ne paraît pas non plus s'adapter au cas de notre matériau : l'AU2GN recuit.

•

La méthode de résolution adoptée est la suivante : la distribution des contraintes est postulée sous la forme :

$$\sigma = \sigma_{\text{élastique}} + \sigma^*$$

et le problème revient à déterminer un champ σ^* statiquement admissible (c'est-à-dire satisfaisant aux équations d'équilibre et aux conditions aux limites :

- orifice libre,
- à l'infini, $\sigma^* = 0$)

qui rende minimum une certaine fonctionnelle des contraintes ("énergie complémentaire") établie par **Greenberg** (1949) pour les lois de type entière et que les auteurs ont modifiée afin de tenir compte d'un domaine infini [23].

Les contraintes $\sigma^*(r, \theta)$ sont développées en séries de Fourier de la variable θ et en séries de Laurent de la variable r .

La minimisation s'effectue par deux procédés :

- 1 - En dérivant la fonctionnelle des contraintes par rapport aux coefficients inconnus (constants) des développements ce qui conduit à la résolution d'un système algébrique non linéaire.
- 2 - Soit en appliquant une méthode de gradient.

•

La solution du problème a été donnée en tronquant les développements aux mêmes ordres qu'en élasticité (termes constants, termes en $1/r^2$, en $1/r^4$, en $\sin 2\theta$ et $\cos 2\theta$).

L'auteur compare les résultats obtenus en ce qui concerne l'évolution du facteur de concentration de contrainte en fonction de la force appliquée avec ceux obtenus en utilisant la méthode préconisée par **Stowell**. Ils diffèrent d'environ 15% pour une force donnée.

•

Critique de la méthode : Les auteurs estiment que le processus numérique de minimisation est très compliqué et qu'il serait intéressant d'avoir un procédé plus efficace que ceux mentionnés plus haut. D'un autre côté, la puissance actuelle des ordinateurs permettrait probablement de résoudre plus efficacement des systèmes algébriques non linéaires (méthode 1) ou de réduire considérablement le nombre d'itérations (méthode 2).

Du fait de l'absence de résultats expérimentaux, nous ne savons pas si la solution trouvée est la bonne puisque les questions de convergence n'ont pas été abordées.

Nous ne disposons que de la comparaison avec un autre calcul théorique (Stowell) et la confrontation n'est pas probante (15 % d'écart sur les contraintes) d'après les auteurs.

Le principe variationnel portant sur les contraintes, les équations de compatibilité des déformations ne sont satisfaites que de façon approximative et par conséquent nous n'aurons pas accès aux déplacements si nous en avons besoin.

On sait de façon générale que lorsque l'on utilise une formulation variationnelle sur les contraintes, les déformations obtenues ne sont pas toujours très bonnes ce qui est gênant si l'on veut comparer les résultats théoriques et expérimentaux.

Enfin, les auteurs estiment que l'utilisation d'une loi incrémentale de plasticité serait nécessaire.

En effet, il n'est pas assuré que le chargement soit rigoureusement simple comme nous l'avons déjà signalé.

Nous verrons plus loin qu'on pourra le considérer comme « quasi simple », mais nous conserverons une loi du type Prandtl-Reuss qui est plus exacte que celle de Hencky.

1,2.3. Conclusion

Compte tenu des remarques effectuées à propos de l'étude des deux mémoires principaux sur notre sujet, nous allons aborder le problème :

- en cherchant à satisfaire au mieux les équations de la mécanique des milieux continus afin d'obtenir au voisinage du point le plus chargé un champ de contraintes et de déformations proche de la réalité expérimentale et ceci par une méthode « mixte »,
- en améliorant les relations contraintes - déformations utilisées par les auteurs précités par l'adoption d'une loi du type Prandtl-Reuss.

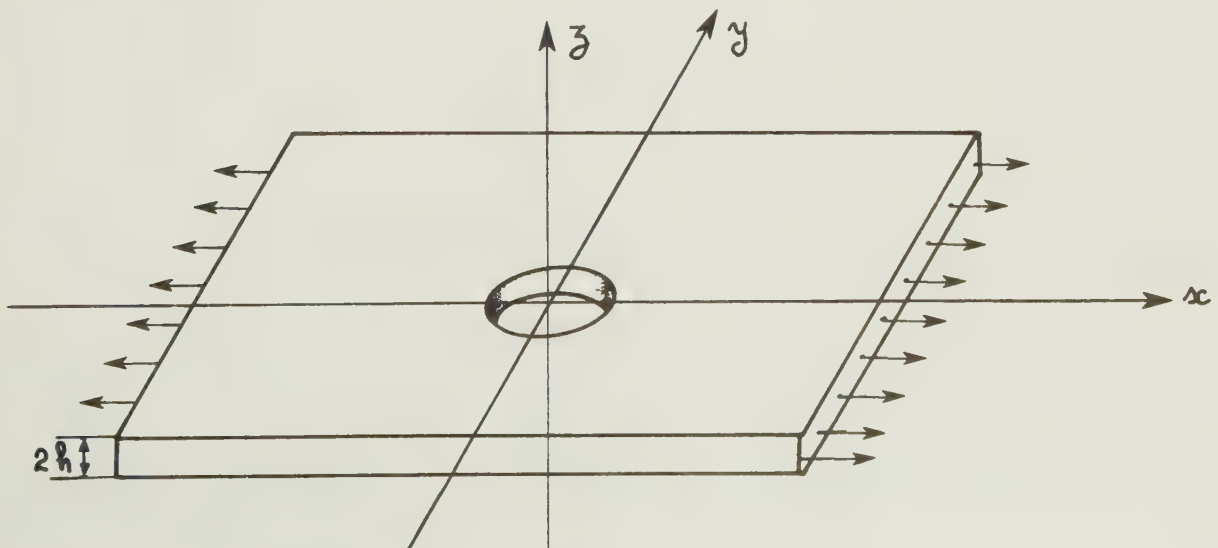
II. POSE DU PROBLÈME

II,1. Description de la structure

La structure se compose d'une plaque rectangulaire d'épaisseur $2h$ négligeable vis-à-vis des dimensions transversales.

Le feuillet moyen de la plaque est pris pour plan xOy . Cette plaque, non chargée sur ses deux faces, est soumise à des efforts extérieurs agissant dans son plan et symétriquement distribués par rapport au feuillet moyen.

Par raison de symétrie, celui-ci est donc dans un état de déplacement plan.



La structure est munie d'un orifice circulaire central libre. Nous reviendrons plus loin sur les dimensions du trou vis-à-vis de celles de la pièce considérée.

II,2. Hypothèses générales

Hypothèse H1

Nous ferons croître les forces (resp. décroître) assez lentement pour que les forces d'inertie soient négligeables. On suppose donc le processus de chargement quasi-statique.

Hypothèse H2

Equilibre élasto-plastique isotherme.

Hypothèse H3

Nous supposons qu'initialement le matériau est vierge de toute contrainte. Nous partons donc de l'état non chargé et non écroui qui sera pris comme état de référence pour les déplacements.

Hypothèse H4

Le corps est supposé homogène et isotrope au cours des chargements (nous reviendrons sur cette question plus tard à propos de la loi de comportement).

Hypothèse H5

Nous supposons les forces volumiques négligeables devant les efforts extérieurs surfaciques appliqués.

Hypothèse H6

Nous supposons qu'il n'y a pas de couples de contraintes dans le corps ce qui entraîne la symétrie du tenseur des contraintes.

Hypothèse H7

Nous nous intéressons aux petites déformations élasto-plastiques; par conséquent, à chaque instant, les équations de la mécanique des milieux continus sont écrites dans l'état non perturbé du corps et les conditions aux limites sont écrites sur les frontières initiales [12].

Nous écrirons donc :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left[\text{grad } \underline{u} + {}^T(\text{grad } \underline{u}) \right]$$

où $\underline{\underline{\epsilon}}$ est le tenseur des déformations, et où le dernier terme du second membre est le transposé du précédent.

$\underline{u}(M, \frac{t}{\tau})$: vecteur déplacement d'un point M du corps,
 $\frac{t}{\tau}$: caractérisant les étapes successives du chargement.

Hypothèse H8

Nous ferons l'hypothèse **des contraintes planes**, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} - \underline{\underline{\sigma}} & \text{ se réduit à sa partie tangentielle,} \\ - \frac{\partial}{\partial z} \underline{\underline{\sigma}} & = 0. \end{aligned}$$

Ceci peut se justifier à l'aide des considérations suivantes : en coordonnées cartésiennes x, y, z , nous pouvons écrire :

$$\underline{u} = \begin{cases} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \\ u_z(x, y, z) \text{ linéaire en } z \text{ (fonction impaire de } z \text{)}. \end{cases}$$

En effet, par raison de symétrie ($z \rightarrow -z$) les variations de $u_x(x, y, z)$ et de $u_y(x, y, z)$ selon z seront négligeables au second ordre près en z .

En ce qui concerne les contraintes, nous avons au départ en coordonnées cartésiennes ($\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$):

$$\underline{\underline{\sigma}}_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y, z) & \sigma_{xy}(x, y, z) & \sigma_{xz}(x, y, z) \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}(x, y, z) & \sigma_{yz}(x, y, z) \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Ecrivons qu'il n'y a pas de forces extérieures sur les deux faces :

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \Big|_{\text{faces}}$$

$$\left(\sum_j n_j \vec{e}_j = \vec{n} : \text{normale extérieure} \right).$$

Ce qui entraîne :

$$\sigma_{xz}(x, y, \pm h) = 0, \quad \sigma_{yz}(x, y, \pm h) = 0, \quad \sigma_{zz}(x, y, \pm h) = 0.$$

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\text{div } \sigma = 0$$

l'équation

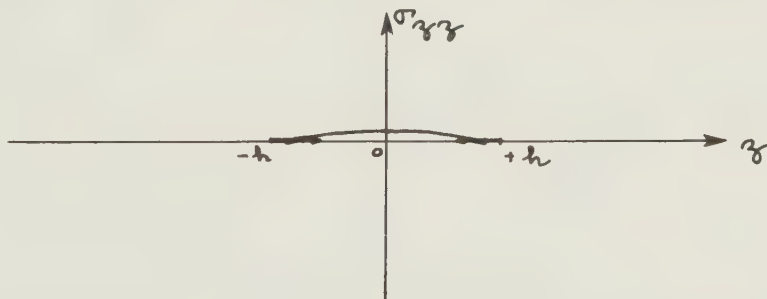
$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad \text{entraîne :}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}(x, y, \pm h)}{\partial z} = 0 \quad \text{puisque}$$

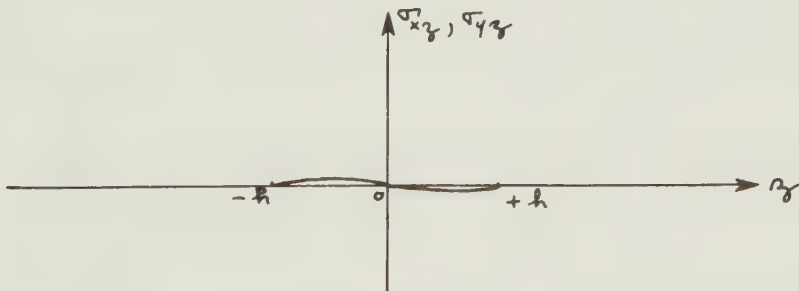
$$\frac{\partial \sigma_{zx}(x, y, \pm h)}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma_{zy}(x, y, \pm h)}{\partial y} = 0, \quad \forall (x, y),$$

du fait de la nullité de $\sigma_{zx}(x, y, \pm h)$ et de $\sigma_{zy}(x, y, \pm h)$, $\forall (x, y)$.

D'autre part, par raison de symétrie, $\sigma_{zz}(x, y, z)$ est une fonction paire de z ; d'où l'allure de la courbe σ_{zz} en fonction de z :



Il est facile de constater d'ailleurs que σ_{xx} , σ_{xy} et σ_{yy} sont des fonctions paires de z , et que σ_{xz} et σ_{yz} sont des fonctions impaires de z :



Donc l'on peut conclure que σ_{xz} , σ_{yz} et σ_{zz} nuls sur les deux faces de la plaque, sont approximativement nuls à l'intérieur.

Tout ceci peut justifier le fait que nous avons affaire à un champ de contraintes planes en tout point du corps (on se limite donc en quelque sorte au calcul des valeurs principales de toutes les grandeurs intervenant dans les équations).

En conséquence, avec la forme des lois isotropes (élasticité linéaire et loi du type Prandtl-Reuss en plasticité) on déduit qu'en coordonnées cartésiennes le tenseur des déformations ϵ se représente par la matrice :

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}(x,y) & \epsilon_{xy}(x,y) & 0 \\ \epsilon_{yx}(x,y) & \epsilon_{yy}(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz}(x,y) \end{bmatrix}$$

Comme :

$$\epsilon_{zz}(x,y) = \frac{\partial u_z(x,y,z)}{\partial z}$$

on déduit :

$$u_z(x,y,z) = z \epsilon_{zz}(x,y)$$

$$(u_z(x,y,0) = 0) \quad .$$

Passons à présent aux équations de compatibilité des déformations :

Dans le cas de contraintes planes, il y a quatre équations de compatibilité (il n'y en a qu'une dans le cas de déformations planes) qui s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \\ (2) \quad \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = 0. \end{array} \right.$$

Les trois équations (2) imposent à ϵ_{zz} d'être de la forme :

$$\epsilon_{zz}(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Donc, par exemple, en élasticité, on devrait avoir : $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ affine en x et y (car :

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}).$$

Le fait que cette condition ne sera qu'approximativement vérifiée indique que dans une plaque mince chargée dans son plan, l'hypothèse des contraintes planes n'est pas très correcte : les déformations de plusieurs plaques minces superposées et également chargées ne sont pas compatibles entre elles.

Nous constatons par ailleurs que l'équation de compatibilité (1) est découplée des trois autres (2).

On peut donc penser que la solution sera exacte en ce qui concerne ce qui se passe dans le plan de la plaque. Les équations de la mécanique détermineront les contraintes et les composantes tangentielles du déplacement (c'est-à-dire u_x et u_y).

Une fois connues les contraintes, on utilise la loi de comportement pour déterminer après coup ϵ_{zz} en fonction de σ : processus classique dans les problèmes bidimensionnels pour trouver soit σ_{zz} en déformations planes, soit ϵ_{zz} en contraintes planes. D'où l'on peut déduire : $u_z = z \epsilon_{zz}$.

•

Remarque :

1) Reprenons la solution élastique du problème de la plaque infinie rappelée au début de cette étude et formons :

$$\begin{cases} T_r(\sigma) = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\infty} \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \\ \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu \sigma_{\infty}}{E} \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \\ u_z = \gamma \varepsilon_{zz} \end{cases}$$

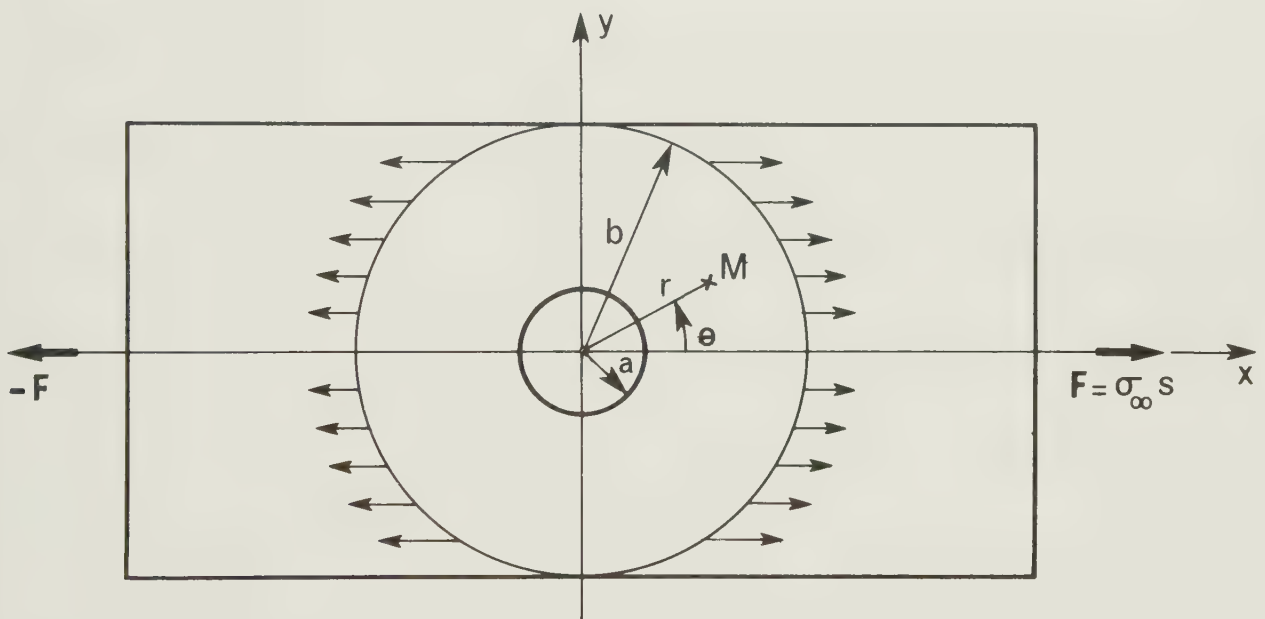
Nous constatons que ε_{zz} n'est pas une fonction linéaire de x et de y , autrement dit ε_{zz} n'est pas compatible mais ε_{xx} , ε_{xy} et ε_{yy} le sont.

L'hypothèse des contraintes planes ne constitue qu'une approximation du problème physique qui ne donne peut-être des résultats valables que pour ce qui se passe dans le plan de la plaque.

D'un autre côté, on aurait pu se demander si l'on n'aurait pas pu faire l'hypothèse des déformations planes : expérimentalement il est très difficile de réaliser un essai de déformation plane sur une plaque mince (il faudrait maintenir les deux faces de la plaque dans un étau).

2) En fait, on écrit : $\varepsilon_{zz} = \alpha x + \beta y + \gamma$ à un certain ordre en z près.

II,3. Etude des conditions aux limites



II,3.1. Sur le bord du trou (rayon a)

En coordonnées polaires, on écrira que pour $r = a$, il n'y a pas de forces à l'intérieur du trou $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r, \theta) & \sigma_{r\theta}(r, \theta) & 0 \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) & \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{rr}(a, \theta) = 0$$

$$\sigma_{r\theta}(a, \theta) = 0$$

11,3.2. Sur la frontière extérieure

Tous les travaux que nous avons mentionnés dans notre bibliographie traitaient toujours du cas de la plaque infinie (couronne circulaire dont on faisait tendre le rayon b vers l'infini, voir figure p. 13).

Comme nous ne cherchons pas une solution sous forme analytique, nous allons supposer que le trou possède un rayon a suffisamment petit par rapport à b de telle sorte que la présence de l'orifice ne constitue qu'une perturbation très localisée des contraintes à l'intérieur d'un champ de tension uniforme (σ_{∞}) .

D'où :

Hypothèse H9

Le champ de contraintes est supposé uniaxial à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}(0, b)$.

Une étude expérimentale (comme nous le verrons plus loin) a permis de déterminer la valeur ρ_{max} du rapport a/b au delà de laquelle cette hypothèse ne peut plus être considérée comme valable.

Considérons le tenseur uniaxial des contraintes dans un repère cartésien, il se représente par la matrice :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\infty} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En coordonnées cylindriques, ce tenseur admet pour composantes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \sigma_{\infty} \cos^2 \theta \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\infty} \sin^2 \theta \\ \sigma_{r\theta} = -\sigma_{\infty} \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

D'où les conditions aux limites sur le cercle $r = b$.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(b, \theta) &= \sigma_{\infty} \cos^2 \theta \\ \sigma_{r\theta}(b, \theta) &= -\sigma_{\infty} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Remarque :

$\sigma_{\theta\theta}$ n'intervient pas dans les conditions aux limites puisque celles-ci portent sur les forces et non sur les contraintes.

11,4. Etude des équations d'équilibre

En contraintes planes et en coordonnées polaires, $\text{div } \sigma = 0$ devient par projection :

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2 \sigma_{r\theta}}{r} = 0 \end{cases}$$

Nous rappelons qu'il existe une fonction des contraintes $\varphi(r, \theta)$ définie à une fonction linéaire de $r \cos \theta$ et $r \sin \theta$ près telle que :

$$(II) \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \end{cases}$$

(I) étant équivalent à (II) dans le cas de domaines simplement connexes.

Dans le cas de corps multiplement connexes comme c'est le cas ici, il faut de plus assurer l'uniformité des fonctions $\sigma(r, \theta)$.

II.5. Etude de la compatibilité des déformations

Si nous partons d'un champ de contraintes satisfaisant aux équations d'équilibre, c'est-à-dire si nous partons de la fonction $\varphi(r, \theta)$ il faudrait que :

- les conditions aux limites soient vérifiées,
- par l'intermédiaire de la loi de comportement, en passant aux $\mathcal{E}$, les équations de compatibilité doivent être satisfaites (compte tenu des remarques faites à ce sujet précédemment, nous ne conservons qu'une équation).

On sait que ces équations sont des conditions d'intégrabilité locales d'obtention des déplacements et sont nécessaires et suffisantes dans le cas de domaines simplement connexes.

Elles ne sont pas suffisantes dans le cas de corps multiplement connexes comme c'est le cas ici, et doivent être complétées par les conditions de fermeture [13] qui garantissent l'uniformité des déplacements (en θ).

Nous aurions donc à résoudre une équation aux dérivées partielles du second ordre par rapport aux $\mathcal{E}$.

La fonction φ qui était biharmonique en élasticité plane, ce qui permettait l'emploi des méthodes de variables complexes, ne l'est plus en élasto-plasticité avec écrouissage.

L'équation à laquelle satisfait φ en portant dans l'équation de compatibilité au travers des relations contraintes-déformations devient très compliquée.

Nous pouvons alors penser partir d'un champ de déplacements posé a priori :

$$\vec{u} \begin{vmatrix} u_r(r, \theta) \\ u_\theta(r, \theta) \end{vmatrix}$$

On en déduit les déformations par la relation : $\mathcal{E} = \frac{1}{2} [\text{grad } u + {}^T(\text{grad } u)]$, tenseur dont les composantes en coordonnées polaires sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{cases}$$

* Pour une expression intrinsèque tridimensionnelle de cette fonction, se reporter à [22].

Il n'est alors plus question d'équation de compatibilité.

Examinons à présent les contraintes. Pour cela, il est nécessaire d'inverser la loi de comportement afin d'exprimer les contraintes en fonction des déformations : nous rappelons que la loi de Prandtl-Reuss exprime l'accroissement de déformation plastique en fonction des contraintes.

Nous devons de plus utiliser l'équation de liaison : $d\sigma_{zz} = 0$ afin de pouvoir éliminer ϵ_{zz} des équations de comportement.

$d\sigma_{zz}$: différentielle de σ_{zz} par rapport au chargement.

Il faudra ensuite vérifier les deux équations d'équilibre (I) et les conditions aux limites. Ce processus nous a paru très lourd.

•

Nous allons à présent aborder la méthode "mixte" adoptée.

III. MÉTHODE DE RÉOLUTION

III,1. Etude des déplacements

D'après les études bibliographiques [7], [11] et la forme des solutions obtenues par les différents auteurs d'une part, à cause des conditions d'uniformité des fonctions d'autre part, et un peu aussi de par la forme de la solution élastique, nous avons approché les fonctions déplacements par des polynômes trigonométriques tronqués.

La base des polynômes prise est mise sous la forme suivante :

$$1, \sin \theta, \cos \theta, \sin \theta \cos \theta, \cos^2 \theta, \\ \sin \theta \cos^2 \theta, \cos^3 \theta, \dots, \sin \theta \cos^m \theta, \cos^{m+1} \theta, \dots$$

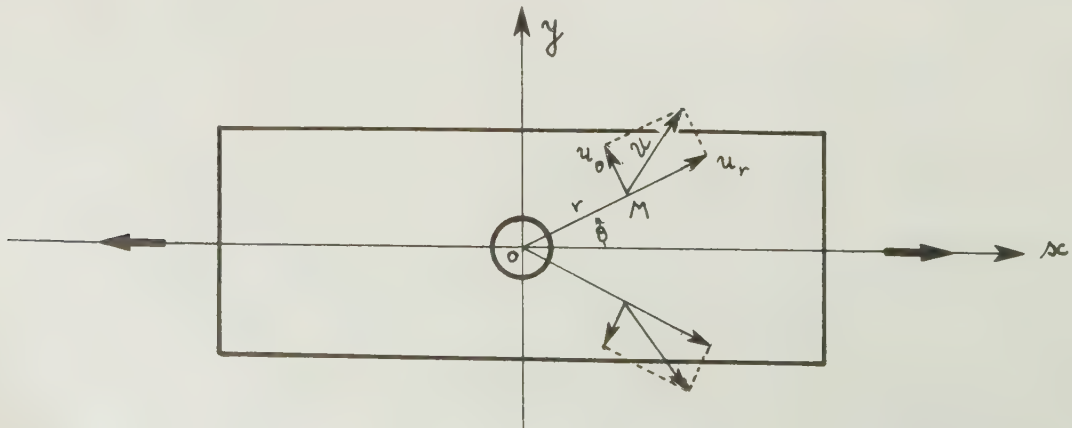
Les fonctions déplacements étant supposés continûment différentiables, nous savons d'après le théorème de Stone-Weierstrass (théorème d'approximation polynomiale) qu'il est possible d'approximer sur tout compact une fonction continue uniformément par un polynôme. Nous ne trouverons pas forcément le polynôme qui converge uniformément vers la solution, car c'est un théorème d'existence et qui ne permet donc pas de construire ces polynômes.

Afin de ne pas alourdir l'exposé nous donnons les formules limitées au degré utilisé dans nos calculs, et non pas les formules générales qui se déduisent aisément de celles qui figurent ci-après :

$$\vec{u} \rightarrow \begin{cases} u_r(r, \theta) = u_6(r) + u_7(r) \cos^2 \theta + u_8(r) \cos^4 \theta \\ u_\theta(r, \theta) = u_9(r) \sin \theta \cos \theta + u_{10}(r) \sin \theta \cos^3 \theta \end{cases}$$

Les termes impairs s'éliminent par des considérations simples de symétrie :

- symétrie par rapport à l'origine $(\theta \rightarrow \theta + \pi, r \rightarrow r)$
- symétrie par rapport à un axe $(\theta \rightarrow 2\pi - \theta, r \rightarrow r)$



Nous notons le fait important suivant : le mouvement arbitraire de corps solide a été éliminé par les considérations de symétrie.

Passage aux déformations

Nous rappelons que les conditions d'uniformité des déplacements sont satisfaites et qu'il n'est plus question de compatibilité des déformations.

D'après les relations page 15, nous déduisons :

(A) Nombre de fonctions inconnues 5 ($u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}$)	$\varepsilon_{rr}(r, \theta) = u'_6(r) + u'_7(r) \cos^2 \theta + u'_8(r) \cos^4 \theta$ $\varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) = \left[\frac{u_6(r) - u_9(r)}{r} \right] + \left[\frac{u_7 + 2u_9 - 3u_{10}}{r} \right] \cos^2 \theta + \left[\frac{u_8 + 4u_{10}}{r} \right] \cos^4 \theta$ $\varepsilon_{r\theta}(r, \theta) = \frac{1}{2} \left[u'_9 - \frac{2u_7 + u_9}{r} \right] \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \left[u'_{10} - \frac{4u_8 + u_{10}}{r} \right] \sin \theta \cos^3 \theta$
---	--

La notation $'$ désignant la dérivée par rapport à r

$$\left(u'_6(r) = \frac{du_6(r)}{dr} \right).$$

III,2. Etude des contraintes

Puisque les déformations ont été prises sous la forme de polynômes trigonométriques, il est normal d'utiliser la même forme pour les contraintes.

Nous faisons remarquer de plus que les conditions aux limites sont sous forme polynomiale et rigoureusement limitées à l'ordre de deux en ce qui concerne le cercle extérieur (pour le cercle intérieur nous avons le polynôme nul).

Afin de ne pas avoir à utiliser les équations d'équilibre, nous nous sommes servis d'une approximation polynomiale de la fonction des contraintes $\varphi(r, \theta)$.

A ce stade, nous devons faire les remarques suivantes :

1. La zone plastique se situe au voisinage des points les plus chargés, c'est-à-dire des points de coordonnées $r = a, \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{3\pi}{2}$. Ailleurs la solution est presque élastique (on sait que s'il n'y a pas de plasticité, la solution s'arrête rigoureusement à l'ordre 2 en $\cos \theta$ et à $\sin \theta \cos \theta$).

Comme nous aurons à élever les développements trigonométriques à une certaine puissance - du fait de la présence de la fonction $f(S_2)$ par exemple, S_2 : second invariant du déviateur des contraintes - et afin de pouvoir raccorder les déformations et les contraintes par l'intermédiaire de la loi de comportement,

nous négligerons les termes en $\cos^6 \theta, \sin \theta \cos^5 \theta$, et au-delà, ce qui est légitime au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.

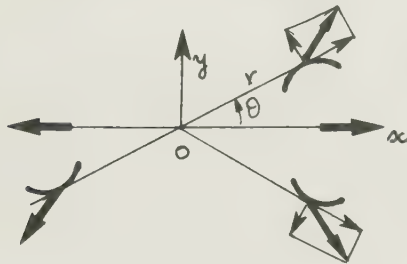
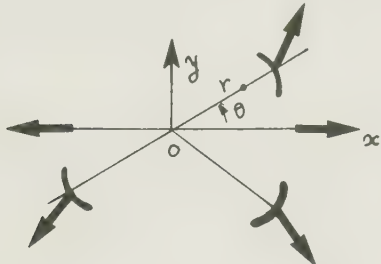
2. On pourrait se demander si l'on aurait pu utiliser les développements en séries de Fourier au lieu des développements en séries de puissance : en non-linéaire rien ne justifie le fait de négliger par exemple $\cos^6 \theta$ devant $\cos^4 \theta$ alors qu'on peut négliger, dans certaines limites $\cos^6 \theta$ devant $\cos^4 \theta$.

3. Les développements des contraintes sont tronqués au même ordre que ceux des déplacements, afin de pouvoir identifier les coefficients inconnus sur la base trigonométrique (relations de comportement valables

quelque soit θ), ce qui nous conduit à un système différentiel ayant autant d'équations que d'inconnues et avec un nombre de conditions aux limites égal au nombre d'équations, comme nous allons le montrer.

Considérations de symétries

En développant la fonction $\varphi(r, \theta)$ et en passant aux contraintes à l'aide des relations (II) écrites page 15, des considérations de symétries évidentes sur les forces permettent :



1. en considérant la facette définie par la normale $\vec{n} \Big|_0^1$

et en utilisant les symétries par rapport à l'origine et à l'axe Ox par exemple,

2. en considérant la facette définie par la normale $\vec{n} \Big|_1^0$ et les mêmes symétries,

d'approximer la fonction des contraintes, définie à une fonction linéaire en $r \sin \theta$ et $r \cos \theta$ près, par :

$$\varphi(r, \theta) = C_0(r) + \mu_2(r) \cos^2 \theta + \mu_4(r) \cos^4 \theta$$

(Ces notations seront uniformisées par la suite car nous poserons :

$$C'_0(r) = \mu_1(r) \quad , \quad \mu'_2(r) = \mu_3(r) \quad , \quad \mu'_4(r) = \mu_5(r) \quad) .$$

d'où l'on tire les relations suivantes :

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = C''_0 + \mu''_2 \cos^2 \theta + \mu''_4 \cos^4 \theta$$

$$(B) \quad \sigma_{rr}(r, \theta) = \left(\frac{C'_0}{r} + \frac{2\mu_2}{r^2} \right) + \left(\frac{\mu'_2}{r} + \frac{12\mu_4 - 4\mu_2}{r^2} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{\mu'_4}{r} - \frac{16\mu_4}{r^2} \right) \cos^4 \theta$$

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta) = \left(\frac{2\mu'_2}{r} - \frac{2\mu_2}{r^2} \right) \sin \theta \cos \theta + \left(\frac{4\mu'_4}{r} - \frac{4\mu_4}{r^2} \right) \sin \theta \cos^3 \theta$$

(Notation : $C''_0 = \frac{d^2 C_0}{dr^2} \quad) .$

Nombre de fonctions inconnues : 5

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0'(r) = \mu_1(r) \quad \text{---} \quad (\text{changement de notation}) \\ \mu_2(r) \\ \text{Posons : } \mu_2'(r) = \mu_3(r) \quad \text{---} \\ \mu_4(r) \\ \text{Posons : } \mu_4'(r) = \mu_5(r) \quad \text{---} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pour se ramener d'une équation} \\ \text{différentielle du second ordre à} \\ \text{deux équations du premier ordre.} \end{array}$$

Nous avons donc en tout dix fonctions inconnues à déterminer.

•

Remarque :

Dans l'expression des contraintes ne figurent que C_0' et C_0'' , ce qui est normal, puisque, ayant exclu les termes linéaires en $r \sin \theta$ et $r \cos \theta$, $\Psi(r, \theta)$ est maintenant déterminé à une constante près. En fait, il n'est pas nécessaire de connaître complètement Ψ .

III,3. Etude des conditions aux limites

III,3.1. Sur le bord du trou

En écrivant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}(a, \theta) = 0 \\ \sigma_{r\theta}(a, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad \forall \theta$$

on obtient cinq équations à cinq inconnues :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\mu_1(a)}{a} + \frac{2\mu_2(a)}{a^2} = 0 \\ \frac{\mu_3(a)}{a} + \frac{12\mu_4(a) - 4\mu_2(a)}{a^2} = 0 \\ \frac{\mu_5(a)}{a} - \frac{16\mu_4(a)}{a^2} = 0 \\ - \frac{2\mu_2(a)}{a^2} + \frac{2\mu_3(a)}{a} = 0 \\ - \frac{4\mu_4(a)}{a^2} + \frac{4\mu_5(a)}{a} = 0 \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit facilement que :

$$\begin{array}{ll} u_1(a) = 0 & u_4(a) = 0 \\ u_2(a) = 0 & u_5(a) = 0 \\ u_3(a) = 0 & \end{array}$$

III,3.2. Sur la frontière extérieure

En écrivant que :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(b, \theta) = \sigma_{\infty} \cos^2 \theta \\ \sigma_{r\theta}(b, \theta) = -\sigma_{\infty} \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad \forall \theta$$

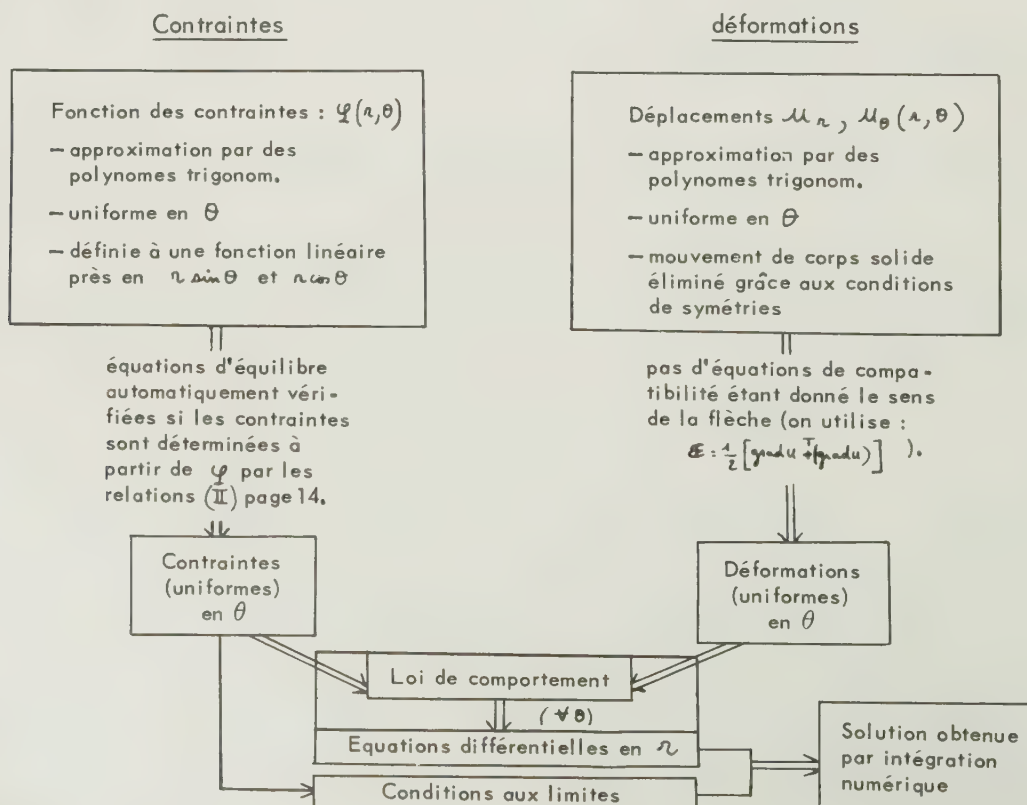
on obtient de la même façon, sans entrer dans les détails des calculs :

$$\begin{array}{ll} u_1(b) = b \sigma_{\infty} & u_3(b) = -b \sigma_{\infty} \\ u_2(b) = -\frac{b^2}{2} \sigma_{\infty} & u_4(b) = 0 \\ & u_5(b) = 0 \end{array}$$

Nous avons donc dix fonctions inconnues à déterminer par dix équations différentielles et dix conditions aux limites. Le problème est donc bien posé.

Les équations différentielles sont fournies par la loi de comportement qui joue ici le rôle d'équation de "compatibilité" entre contraintes et déformations. La loi de comportement nous donne des indications sur la forme des champs de contraintes et de déformations, en nous restreignant à ne pas prendre trop d'arbitraire dans le choix des degrés des développements, par exemple : même degré en θ et en ϵ .

III,4. Résumé synoptique du processus adopté



III,5. Exemple d'application en élasticité

Avant d'aborder les problèmes posés par la loi de comportement élasto-plastique, nous allons appliquer la méthode de résolution précédente au cas élastique.

Nous allons retrouver le fait que la solution s'arrête rigoureusement à l'ordre 2 (termes en $\cos^2 \theta$ et $\sin \theta \cos \theta$) en examinant le système différentiel linéaire et homogène obtenu.

En élasticité comme en plasticité, ce système est à coefficients non constants.

La méthode d'intégration numérique de ce système avec conditions aux limites a été testée en élasticité car il se présente sous le même aspect qu'en plasticité.

Ecrivons donc les relations contraintes-déformations :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E : \text{module d'Young} \\ \nu : \text{coefficient de Poisson} \\ \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) : \text{trace du tenseur } \underline{\underline{\sigma}}, \end{array} \right.$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}}{E} \\ \epsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}}{E} \\ \epsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\theta}. \end{array} \right.$$

Sans entrer dans le détail des calculs, nous utilisons les relations (A) page 17 et (B) page 18, et il vient en identifiant les termes constants, les termes en $\cos^2 \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ et les termes en $\cos^4 \theta$ et $\sin \theta \cos^3 \theta$.

Le système se présente sous forme résolue, c'est-à-dire :

$$\frac{d\vec{u}(r)}{dr} = \underline{\underline{M}}(r) \cdot \vec{u}(r).$$

Nous remarquons tout de suite que les équations donnant u'_4 , u'_5 , u'_8 et u'_{10} (encadrées) sont indépendantes de toutes les autres. Si on avait poussé les développements plus loin, il aurait été aisé de constater que cette propriété se conserve pour les coefficients de tous les termes de base, c'est-à-dire tous ceux supérieurs au rang 2.

On a de plus les quatre conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_4(a) = 0 \\ u_5(a) = 0 \end{array} \right. \quad - \quad \left\{ \begin{array}{l} u_4(b) = 0 \\ u_5(b) = 0. \end{array} \right.$$

En vertu du théorème d'unicité en élasticité et comme le système est linéaire et homogène, la seule solution possible est la solution banale. Nous voyons donc que la solution s'arrête rigoureusement à l'ordre 2 (termes en $\cos^2 \theta$, $\sin \theta \cos \theta$).

En ce qui concerne la résolution numérique, le processus est indiqué en annexe I.

Les résultats obtenus sont examinés rapidement dans la partie expérimentale car nous nous intéressons surtout à ceux obtenus en plasticité.

Nous rappelons que nous ne traitons pas le cas d'une plaque infinie ($b \rightarrow +\infty$) mais celui d'une éprouvette de dimension finie, avec un rapport $\frac{a}{b}$ choisi de telle façon que l'hypothèse H9 soit aussi bien vérifiée que possible.

Les bons résultats obtenus en élasticité montrent que le processus d'intégration numérique est correct. Ainsi nous avons pu tester la résolution numérique, par la méthode indiquée en annexe I, d'un système d'équations différentielles linéaires et homogènes, à coefficients non constants, et avec conditions aux limites.

μ_1'	$\frac{\nu}{n}$	$\frac{2\nu}{n^2}$	0	0	0	$\frac{E}{n}$	0	0	$-\frac{E}{n}$	0	μ_1
μ_2'	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	μ_2
μ_3'	0	$-\frac{4\nu}{n^2}$	$\frac{\nu}{n}$	$\frac{12\nu}{n^2}$	0	0	$\frac{E}{n}$	0	$\frac{2E}{n}$	$-\frac{3E}{n}$	μ_3
μ_4'	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	μ_4
μ_5'	0	0	0	$-\frac{16\nu}{n^2}$	$\frac{\nu}{n}$	0	0	$\frac{E}{n}$	0	$\frac{4E}{n}$	μ_5
μ_6'	$\frac{1-\nu^2}{En}$	$\frac{2(1-\nu^2)}{En^2}$	0	0	0	$-\frac{\nu}{n}$	0	0	$\frac{\nu}{n}$	0	μ_6
μ_7'	0	$\frac{4(\nu^2-1)}{En^2}$	$\frac{1-\nu^2}{En}$	$\frac{12(1-\nu^2)}{En^2}$	0	0	$-\frac{\nu}{n}$	0	$-\frac{2\nu}{n}$	$\frac{3\nu}{n}$	μ_7
μ_8'	0	0	0	$\frac{16(\nu^2-1)}{En^2}$	$\frac{1-\nu^2}{En}$	0	0	$-\frac{\nu}{n}$	0	$-\frac{4\nu}{n}$	μ_8
μ_9'	0	$-\frac{4(1+\nu)}{En^2}$	$\frac{4(1+\nu)}{En}$	0	0	0	$\frac{2}{n}$	0	$\frac{1}{n}$	0	μ_9
μ_{10}'	0	0	0	$-\frac{2(1+\nu)}{En^2}$	$\frac{8(1+\nu)}{En}$	0	0	$\frac{4}{n}$	0	$\frac{1}{n}$	μ_{10}

soit :
$$\vec{\mu}'(n) = \frac{d\vec{\mu}(n)}{dn} = M(n) \cdot \vec{\mu}(n)$$

Conditions aux limites (valables en élasticité ou en plasticité) :

$\mu_1(a) = 0$	$\mu_1(b) = b \sigma_\infty$
$\mu_2(a) = 0$	$\mu_2(b) = -\frac{b^2}{2} \sigma_\infty$
$\mu_3(a) = 0$	$\mu_3(b) = -b \sigma_\infty$
$\begin{cases} \mu_4(a) = 0 \\ \mu_5(a) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \mu_4(b) = 0 \\ \mu_5(b) = 0 \end{cases}$

Nous allons à présent aborder le problème de la loi de comportement élasto-plastique.

IV. LOI DE COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE (avec écrouissage)

Nous savons qu'à température ambiante (20°C), la vitesse du trajet de charge intervient de façon négligeable sur la courbe d'écrouissage (contrainte-déformation) d'une éprouvette métallique.

Nous négligeons donc les effets du temps physique. Nous introduisons de façon classique un paramètre (temps cinématique) repérant les états successifs du corps; ici ce sera la force extérieure F ou plutôt

$\sigma_\infty = \frac{F}{S_0}$ (contrainte existant dans la plaque non trouée).

S_0 : section initiale de l'éprouvette non trouée (puisque l'on est en petites déformations).

IV,1. Hypothèses générales

Nous sommes en présence d'un problème de déformations plastiques contenues, c'est-à-dire limitées par des zones encore élastiques.

Pour évaluer la déformation totale, nous adoptons :

H10 - Hypothèse de partition [14]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p.$$

De plus, grâce à :

H11 - Hypothèse d'indifférence des contraintes [14]

$\boldsymbol{\sigma}$ est relié de façon indépendante à $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ et à $\boldsymbol{\varepsilon}^p$.

$$(1) \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbb{1}.$$

Hypothèse H12. Ecrouissage isotrope.

Hypothèse H13

Nous adoptons le critère de von Mises avec la loi de Prandtl-Reuss [14], [21] : $d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\psi \cdot \boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \mathbb{1}, \text{ déviateur des contraintes.}$$

$$d\psi = f(S_2, S_3, E_c) dS_2 \quad \text{si} \quad dS_2 > 0$$

$$\text{et} \quad S_2 = k^2(E_c)$$

avec : $S_2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)$ (second invariant du déviateur des contraintes), $S_3 = \frac{1}{6} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^3)$ est habituellement négligé.

E_c : désigne l'écrouissage et ne figure plus dans f à cause de l'hypothèse H12.

D'où la loi :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = f(S_2) dS_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\text{si} \quad dS_2 > 0 \quad \text{et} \quad S_2 = k^2.$$

La fonction $f(S_2)$ est déterminée expérimentalement par un essai de traction simple.

Les différentielles $(d\boldsymbol{\varepsilon}^p, dS_2)$ désignent un accroissement de ces grandeurs par rapport au temps cinématique que nous avons choisi, c'est-à-dire à l'accroissement de σ_∞ : $d\sigma_\infty$.

Et par suite, sous forme d'accroissement, la loi élasto-plastique se met sous la forme :

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} d\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(d\boldsymbol{\sigma}) \mathbb{1} + f(S_2) dS_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\text{si} \quad dS_2 > 0 \quad \text{et} \quad S_2 = k^2$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} d\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(d\boldsymbol{\sigma}) \mathbb{1} \quad \text{dans tous}$$

les autres cas.

Une difficulté majeure que nous avons déjà évoquée consiste en l'ignorance de la frontière élasto-plastique.

Nous avons levé cette difficulté en faisant tout d'abord

l'hypothèse H14

Quand on fait croître σ_∞ (c'est-à-dire les forces extérieures) il n'y a pas de décharge dans les zones plastiques.

Respectivement si on fait décroître σ_∞ , tous les points du domaine plastique se déchargent élastiquement en même temps. Cette hypothèse sera à vérifier une fois connue la solution du problème.

Hypothèse H15

Nous supposons que le premier seuil de plasticité est nul. Cela ne veut cependant pas dire que nous utilisons une loi sans seuil.

Pour définir un seuil de plasticité, il faut qu'il y ait décharge et compte tenu de l'hypothèse H14, il n'y a pas de contradiction avec cette dernière affirmation, car en faisant décroître σ_∞ les points de la zone plastique se déchargent élastiquement suivant théoriquement une droite parallèle à la tangente à l'origine de la courbe d'écrouissage.

Par contre, si l'on fait croître de façon continue σ_∞ sans créer de décharge dans le domaine plastique (hypothèse H14), il n'est alors pas nécessaire d'introduire la notion de seuil.

Quand nous voudrions déterminer ultérieurement les contraintes résiduelles - c'est-à-dire les contraintes existantes après annulation des forces extérieures - nous utiliserons la loi élastique, ce qui est cohérent avec l'hypothèse H14.

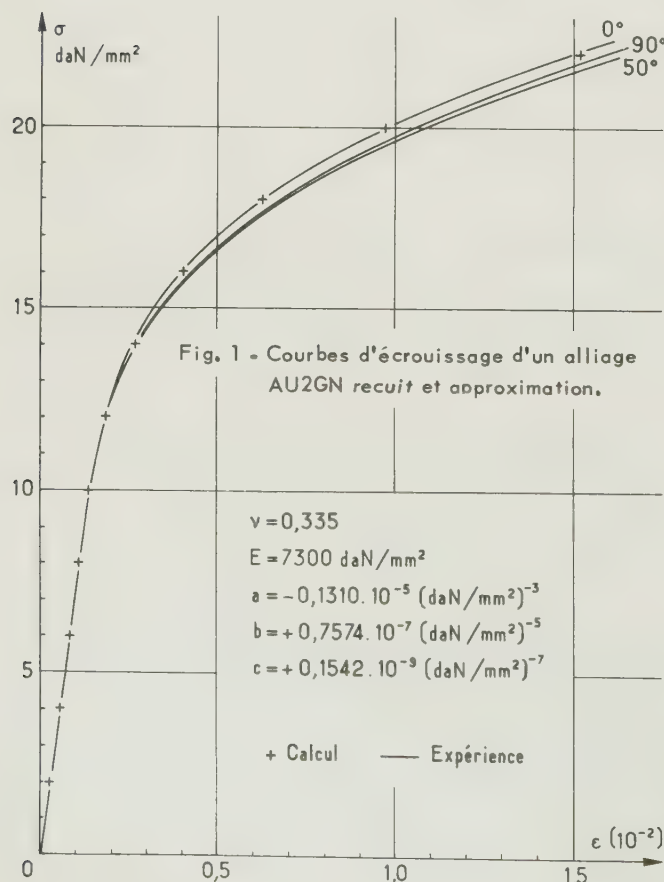
A présent nous allons préciser davantage la forme de la loi :

IV,2. Détermination de la fonction $f(S_2)$

En supposant la continuité de la fonction $f(S_2)$ par rapport à S_2 , nous pouvons approximer uniformément cette fonction par une suite de polynômes en S_2 (théorème de Stone-Weierstrass).

Nous allons donc poser :

$$f(S_2) = a + b S_2 + c S_2^2 + \dots \dots \dots /$$



le degré du polynôme sera choisi tel que pour un état de contrainte uniaxial, cette forme de la fonction $f(S_2)$ approxime au mieux la courbe d'écrouissage expérimentale du matériau, et ceci sans chercher à obtenir une précision supérieure à celle des essais, c'est-à-dire de l'ordre de 1% en contrainte, ce qui équivaut dans le cas le plus défavorable à une erreur de 5% en déformation (fig. 1).

La concordance est très bonne avec trois termes seulement.

Nous posons donc :

$$d\epsilon^p = (a + b S_2 + c S_2^2) dS_2 \quad *$$

* Nous rappelons que le troncage des polynômes trigonométriques s'effectue de la façon suivante : chaque fois que nous obtenons un terme d'ordre supérieur à 4 (par ex. : $\cos^6 \theta$, $\sin \theta \cos^5 \theta$ etc.) en cours de calcul de $f(S_2)$, nous le négligeons (voir page 17).

en uniaxial : (éprouvette de traction)

$$\sigma \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2\sigma}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{3} \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{D}^2) = \frac{\sigma^2}{3}, \quad dS_2 = \frac{2\sigma d\sigma}{3}$$

d'où :

$$d\varepsilon^p = 4 \left(a \frac{\sigma^2}{3} + b \frac{\sigma^4}{24} + c \frac{\sigma^6}{81} \right) d\sigma.$$

Avec l'hypothèse H15 (premier seuil nul), on obtient :

$$\varepsilon^p = \int_0^{\sigma} d\varepsilon^p,$$

(habituellement on intègre à partir du seuil **conventionnel** et non à partir de 0) soit finalement :

$$\varepsilon^p = \frac{4a}{24} \sigma^3 + \frac{4b}{135} \sigma^5 + \frac{4c}{567} \sigma^7$$

La détermination de (a, b, c) a été effectuée par essais autour de valeurs particulières.

On constate d'ailleurs que la courbe théorique $\varepsilon^p(\sigma)$ est très tangente, à l'origine, à l'axe σ .

On pouvait donc se douter a priori de la bonne représentativité de cette relation dans le domaine de déformation considéré et pour le matériau utilisé dont la courbe d'écrouissage (AU2GN recuit) est très arrondie.

Nous reviendrons sur cette approximation de la courbe contrainte-déformation dans la partie expérimentale.

Remarque :

Nous constatons que le développement de $f(S_2)$ ne conduit dans l'expression en uniaxial de $\varepsilon^p(\sigma)$ qu'à un polynôme impair en σ .

On peut se demander si dans un intervalle fermé $\sigma \in [0, \Sigma]$ donné, un polynôme impair en σ peut approximer correctement la courbe expérimentale $\varepsilon^p(\sigma)$.

Nous démontrons en Annexe II qu'il est possible d'approximer dans $\{[0, \Sigma] \subset \mathbb{R}^+\}$ une courbe quelconque par une suite de polynômes impairs.

La loi de comportement que nous adoptons s'écrit donc :

$$d\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} d\sigma - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(d\sigma) \mathbb{1} + (a + bS_2 + cS_2^2) dS_2 \quad \mathcal{D}$$

au cours d'un chargement croissant.

IV.3. Question d'isotropie

Nous savons que l'hypothèse d'un écrouissage isotrope (surface limite "homothétique" à la surface initiale) ne constitue qu'une approximation du comportement réel du matériau.

En fait, une anisotropie se développe très rapidement et on pourrait penser utiliser des lois plus réalistes que celle de Prandtl-Reuss et qui tiennent compte de l'anisotropie de l'écoulement [15].

Dans le cas présent, les forces extérieures croissent de façon proportionnelle.

Cette remarque va nous permettre de constater que l'on a affaire à un chargement "quasi-simple" à l'intérieur du corps.



Par conséquent si en chaque point du matériau une partie relativement restreinte de la courbe limite est concernée, il sera possible de considérer que, même si le matériau était anisotrope, la loi que nous avons employée continuerait à rester valable [16].

Dans notre cas, il y avait d'ailleurs une faible anisotropie initiale pouvant être considérée comme négligeable (voir confrontation théorie-expérience).

Iliouchine [17] a obtenu avec une loi de type entière Hencky-Mises une condition suffisante pour que, lorsque les forces extérieures varient proportionnellement à un paramètre arbitraire, le chargement soit simple en tout point du corps (ceci en négligeant la déformation élastique).

Cette condition s'exprimait par le fait que $f(S_2)$ était une fonction puissance de S_2 (autrement dit, la courbe contrainte équivalente - déformation équivalente pouvait se représenter par une fonction puissance).

Cas de la loi de Prandtl-Reuss munie des hypothèses H14 et H15

$$\text{Hypothèses : } \left\{ \begin{array}{l} - \text{Problème du type II [12].} \\ - \text{Déformation élastique négligée.} \\ - \text{En chaque point de la zone plastique,} \\ \quad \text{nous rappelons que nous supposons } \frac{dS_2}{d\sigma_\infty} > 0. \end{array} \right.$$

Ecrivons les équations de la mécanique dans le cas de chargements proportionnels, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i = \lambda(t) f_i^{(0)} \quad (\text{forces volumiques}) \\ F_i = \lambda(t) F_i^{(0)} \quad (\text{forces surfaciques extérieures}) \\ \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (\text{équilibre}) \\ \sigma_{ij} n_j = F_i \quad \left| \begin{array}{l} \text{conditions aux limites} \\ \text{surface extérieure} \end{array} \right. \\ \mathcal{L} \{ \varepsilon_{ij}^p \} = 0 \quad \text{équations de compatibilité (linéaires)} \\ d\varepsilon_{ij}^p = f(S_2) dS_2 \sigma_{ij} \quad (\text{en fait } \varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p) \end{array} \right.$$

Démontrons qu'il existe $\sigma_{ij}^{(0)}$ tel que :

$$\lambda(t) \sigma_{ij}^{(0)} \text{ soit solution } \forall t$$

si

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda^m f(x)$$

Portons $\sigma_{ij} = \lambda(t) \sigma_{ij}^{(0)}$ dans les équations de la mécanique, il vient :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^{(0)} + f_i^{(0)} = 0 \\ \sigma_{ij}^{(0)} n_j = F_i^{(0)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda(t) \sigma_{ij}^{(0)} f(\lambda^2(t) S_2^{(0)}) S_2^{(0)} d\lambda^2(t)$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_{ij}^{(0)} f(S_2^{(0)}) S_2^{(0)} \lambda^{2n+1} d\lambda^2,$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_{ij}^{(0)} f(S_2^{(0)}) S_2^{(0)} \cdot 2\lambda^{2n+2} d\lambda,$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij}^p = \frac{2\lambda^{2n+3}}{2n+3} \sigma_{ij}^{(0)} f(S_2^{(0)}) S_2^{(0)}.$$

Posons :

$$\mu = \lambda^{2n+3}.$$

D'où en posant :

$$\varepsilon_{ij}^{p(0)} = \frac{2\sigma_{ij}^{(0)} f(S_2^{(0)}) S_2^{(0)}}{2n+3}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij}^p = \mu(t) \varepsilon_{ij}^{p(0)}.$$

Equations de compatibilité :

$$\mathcal{F}^p\{\varepsilon_{ij}^p\} = 0 \Rightarrow \mu(t) \mathcal{F}^p\{\varepsilon_{ij}^{p(0)}\} = 0.$$

D'où :

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_{ij}^{(0)} = 0 \\ \sigma_{ij,j}^{(0)} + f_i^{(0)} = 0 \\ \sigma_{ij}^{(0)} n_j = F_i^{(0)} \quad \text{surf. extérieure} \\ \varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{2}{2n+3} f(S_2^{(0)}) S_2^{(0)} \sigma_{ij}^{(0)} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \sigma_{ij}^{(0)}$ est solution d'un problème d'élasticité non linéaire (avec $\nu = \frac{1}{2}$).

Conclusion :

En élasticité, le chargement est évidemment simple en tout point du corps.

Pour des déformations assez importantes dans lesquelles les déformations élastiques peuvent être négligées :

$$f(S_2) = a + b S_2 + c S_2^2$$

peut se réduire dans la zone de déformation considérée à la partie $c S_2^2$ et on se trouve alors dans le cas d'application du théorème précédemment démontré.

Entre ces deux cas, on peut penser que le chargement sera **quasi-simple** en tout point et principalement dans les régions les plus chargées du corps (au bord du trou, la propriété est évidente).

Nous savons que dans le cas d'un chargement rigoureusement simple la loi de Prandtl-Reuss s'intègre et redonne la loi d'Hencky.

Dans le cas présent, il était intéressant d'utiliser une loi plus précise que celle d'Hencky.

Les relations de comportement employées s'adaptent d'ailleurs très bien à la méthode de calcul adoptée puisque linéaires en ce qui concerne les accroissements de contraintes et de déformations.

V. RÉOLUTION ÉLASTO-PLASTIQUE DU PROBLÈME

Nous allons appliquer la méthode présentée dans le chapitre III en utilisant la loi de comportement précédemment adoptée :

$$d\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} d\sigma - \frac{\nu}{E} \kappa(d\sigma) \mathbb{1} + (a + b S_2 + c S_2^2) dS_2 \mathbb{D},$$

valable dans tout le domaine **en faisant croître constamment les forces** extérieures.

Compte tenu de la forme de la loi de comportement :

L'évolution des contraintes et des déplacements doit être suivie de proche en proche le long du trajet de chargement.

A un instant donné, c'est-à-dire pour une force extérieure donnée, on suppose connus les champs de contraintes et de déplacements.

On doit alors résoudre le problème suivant :

Déterminer les vitesses de contraintes (c'est-à-dire les accroissements de contraintes correspondant à un accroissement des forces extérieures) et les vitesses de déplacements à partir des données aux limites concernant les vitesses de contraintes.

Les déformations sont toujours supposées petites et par suite les équations linéarisées de la mécanique des milieux continus restent valables pour les accroissements des grandeurs considérées.

Etat initial : Etat non chargé et non écroui. Au départ nous supposons toutes les contraintes nulles ainsi

d'ailleurs que les déplacements (puisque ce sont des déplacements relatifs, repérés par rapport à l'état initial).

Nous adoptons donc un processus classique de calcul pas à pas par rapport aux forces extérieures.

Comme :

$$S_2 = \frac{1}{2} T_2 (\varpi^2)$$

nous avons :

$$dS_2 = T_2 (\varpi \cdot d\varpi)$$

$$\underline{d\mathcal{E}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{d\sigma} - \frac{\nu}{E} T_2 (\underline{d\sigma}) \mathbb{1} + (a + b S_2 + c S_2^2) T_2 (\varpi \cdot \underline{d\varpi}) \varpi$$

avec

$$d\varpi = d\sigma - \frac{T_2(d\sigma)}{3} \mathbb{1}.$$

Nous voyons donc que la loi est linéaire en vitesses de contraintes et vitesses de déformations. Nous aboutissons avec la méthode de résolution proposée à un système d'équations différentielles linéaires et homogènes (en ce qui concerne les vitesses).

Sans entrer dans les détails des calculs qui sont assez complexes, nous donnons les principales étapes :

Calcul de S_2 .

$$\varpi \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_{nn} - \sigma_{\theta\theta}}{3} & \sigma_{n\theta} & 0 \\ \sigma_{n\theta} & \frac{2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{nn}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma_{nn} + \sigma_{\theta\theta}}{3} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$S_2 = \frac{\sigma_{nn}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + 3\sigma_{n\theta}^2 - \sigma_{nn}\sigma_{\theta\theta}}{3}.$$

Posons :

$$\sigma \rightarrow \begin{cases} \sigma_{\theta\theta} = \alpha_1 + \alpha_2 \cos^2 \theta + \alpha_3 \cos^4 \theta \\ \sigma_{nn} = \beta_1 + \beta_2 \cos^2 \theta + \beta_3 \cos^4 \theta \\ \sigma_{n\theta} = \gamma_1 \sin \theta \cos \theta + \gamma_2 \sin \theta \cos^3 \theta \end{cases} \quad (\text{voir page 18})$$

avec :

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = \mu'_1 \\ \alpha_2 = \mu''_2 = \mu'_3 \\ \alpha_3 = \mu''_4 = \mu'_5 \end{array} \left| \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{\mu_1}{n} + \frac{2\mu_2}{n^2} \\ \beta_2 = \frac{\mu_3}{n} + \frac{12\mu_4 - 4\mu_2}{n^2} \\ \beta_3 = \frac{\mu_5}{n} - \frac{16\mu_4}{n^2} \end{array} \right| \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{2\mu_3}{n} - \frac{2\mu_2}{n^2} \\ \gamma_2 = \frac{4\mu_5}{n} - \frac{4\mu_4}{n^2} \end{array}$$

On calcule :

$$f(S_2) = a + b S_2 + c S_2^2$$

qui se met sous la forme :

$$f(S_2) = p + q \cos^2 \theta + r \cos^4 \theta$$

avec p, q, r fonctions des α, β, γ et des paramètres d'écroutissage (a, b, c) .

Calcul de dS_2 .

Pour des raisons de commodité nous noterons l'accroissement d'une quantité W par $\overline{W}$ au lieu de dW (donc quand σ_{∞} croît de $\overline{\sigma_{\infty}}$, une quantité W croît de $\overline{W}$).

Donc :

$$\overline{S_2} = \frac{(2\sigma_{nn} - \sigma_{\theta\theta}) \overline{\sigma_{nn}} + (2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{nn}) \overline{\sigma_{\theta\theta}} + 6\sigma_{n\theta} \overline{\sigma_{n\theta}}}{3}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\sigma_{\theta\theta}} = \overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} \cos^2 \theta + \overline{\alpha_3} \cos^4 \theta \\ \overline{\sigma_{nn}} = \overline{\beta_1} + \overline{\beta_2} \cos^2 \theta + \overline{\beta_3} \cos^4 \theta \\ \overline{\sigma_{n\theta}} = \overline{\gamma_1} \sin \theta \cos \theta + \overline{\gamma_2} \sin \theta \cos^3 \theta \end{array} \right.$$

avec : $\overline{\alpha_1} = \overline{\mu'_1}$ etc ...

Nous calculons donc l'expression :

$$\overline{\mathcal{E}^*} = f(S_2) \text{Tr}(\mathcal{D} \cdot \overline{\mathcal{D}}) \mathcal{D}$$

$\overline{\mathcal{E}^e}$ se représente par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{E}_{nn}^e} = \frac{\overline{\sigma_{nn}} - \nu \overline{\sigma_{\theta\theta}}}{E} \\ \overline{\mathcal{E}_{\theta\theta}^e} = \frac{\overline{\sigma_{\theta\theta}} - \nu \overline{\sigma_{nn}}}{E} \\ \overline{\mathcal{E}_{n\theta}^e} = \frac{1+\nu}{E} \overline{\sigma_{n\theta}} \end{array} \right.$$

Nous avons d'autre part :

$$\begin{cases} \overline{u}_r(r, \theta) = \overline{u}_6 + \overline{u}_7 \cos^2 \theta + \overline{u}_8 \cos^4 \theta \\ \overline{u}_\theta(r, \theta) = \overline{u}_9 \sin \theta \cos \theta + \overline{u}_{10} \sin \theta \cos^3 \theta \end{cases}$$

De plus, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{array}{l|l} \overline{u}_1(a) = 0 & \overline{u}_1(b) = b \overline{\sigma}_\infty \\ \overline{u}_2(a) = 0 & \overline{u}_2(b) = -\frac{b^2}{2} \overline{\sigma}_\infty \\ \overline{u}_3(a) = 0 & \overline{u}_3(b) = -b \overline{\sigma}_\infty \\ \overline{u}_4(a) = 0 & \overline{u}_4(b) = 0 \\ \overline{u}_5(a) = 0 & \overline{u}_5(b) = 0 \end{array}$$

D'où en utilisant la loi de comportement et en identifiant les termes constants, les termes en $\cos^2 \theta$, $\sin \theta \cos \theta$, $\cos^4 \theta$, $\sin \theta \cos^3 \theta$ et en mettant le système d'équations différentielles linéaires et homogènes sous forme résolue, on obtient pour **un pas donné en force** un système semblable à celui présenté précédemment en élasticité mais avec les particularités suivantes :

1. Il est écrit pour des accroissements,
2. Les fonctions inconnues $\overline{u}_4$, $\overline{u}_5$, $\overline{u}_8$ et $\overline{u}_9$ ne sont plus indépendantes des autres (à cause des couplages). Par suite la solution du problème élasto-plastique ne sera pas rigoureusement tronquée à l'ordre 2 comme c'était le cas en élasticité linéaire.
3. Ecrivons le système d'équations différentielles sous forme vectorielle :

$$\overline{u}' = M(r, \text{état au pas } i) \cdot \overline{u}$$

On rappelle que : $' = \frac{d}{dr}$.

En élasticité linéaire, M était constant en fonction du pas de chargement, tandis qu'à présent M dépend de toute l'histoire du chargement.

Le système se présente sous la forme :

$$\begin{array}{c} \overline{u}'_1 \\ \overline{u}'_2 \\ \overline{u}'_3 \\ \overline{u}'_4 \\ \overline{u}'_5 \\ \overline{u}'_6 \\ \overline{u}'_7 \\ \overline{u}'_8 \\ \overline{u}'_9 \\ \overline{u}'_{10} \end{array} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{31} \\ M_{32} \\ M_{51} \\ M_{52} \\ M_{71} \\ M_{72} \\ M_{91} \\ M_{92} \\ M_{10,1} \end{array} & \begin{array}{c} M_{12} \\ 0 \\ M_{32} \\ 0 \\ M_{52} \\ M_{62} \\ M_{72} \\ M_{82} \\ M_{92} \\ M_{10,2} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ M_{33} \\ 0 \\ M_{53} \\ 0 \\ M_{73} \\ M_{83} \\ M_{93} \\ M_{10,3} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ M_{34} \\ 0 \\ M_{54} \\ 0 \\ M_{74} \\ M_{84} \\ 0 \\ M_{10,4} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ M_{55} \\ 0 \\ 0 \\ M_{85} \\ 0 \\ M_{10,5} \end{array} & \begin{array}{c} M_{16} \\ 0 \\ M_{36} \\ 0 \\ M_{56} \\ M_{66} \\ M_{76} \\ M_{86} \\ M_{96} \\ M_{10,6} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ M_{37} \\ 0 \\ M_{57} \\ 0 \\ M_{77} \\ M_{87} \\ M_{97} \\ M_{10,7} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{58} \\ 0 \\ 0 \\ M_{88} \\ 0 \\ M_{10,8} \end{array} & \begin{array}{c} M_{19} \\ 0 \\ M_{39} \\ 0 \\ M_{59} \\ M_{69} \\ M_{79} \\ M_{89} \\ M_{99} \\ M_{10,9} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ M_{3,10} \\ 0 \\ M_{5,10} \\ 0 \\ M_{7,10} \\ M_{8,10} \\ 0 \\ M_{10,10} \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{u}_5 \\ \overline{u}_6 \\ \overline{u}_7 \\ \overline{u}_8 \\ \overline{u}_9 \\ \overline{u}_{10} \end{array}$$

avec des conditions aux limites (voir ci-dessus) portant aussi sur les accroissements.

Une fois la solution déterminée, nous passons au pas en force suivant en faisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{pas(i+1)} = \varepsilon_{pas(i)} + \overline{\varepsilon} \\ \sigma_{pas(i+1)} = \sigma_{pas(i)} + \overline{\sigma} \end{array} \right.$$

Les valeurs de $\sigma_{pas(i+1)}$ sont réinjectées dans le calcul et interviennent dans la matrice M en tant que quantités connues et on recommence le processus.

On sait qu'étant donné l'allure générale des courbes d'écroutissage en plasticité, la méthode pas à pas imposée par l'aspect différentiel de la loi de Prandtl-Reuss converge rapidement.

Dans le cas présent, nous faisons varier la force extérieure, c'est-à-dire plus précisément σ_{∞} de 0 à 10 daN/mm^2 (aux environs de la limite élastique conventionnelle du matériau). A l'intérieur de cet intervalle de variation du paramètre cinématique, on a obtenu une très bonne convergence pour 100 pas en force environ.

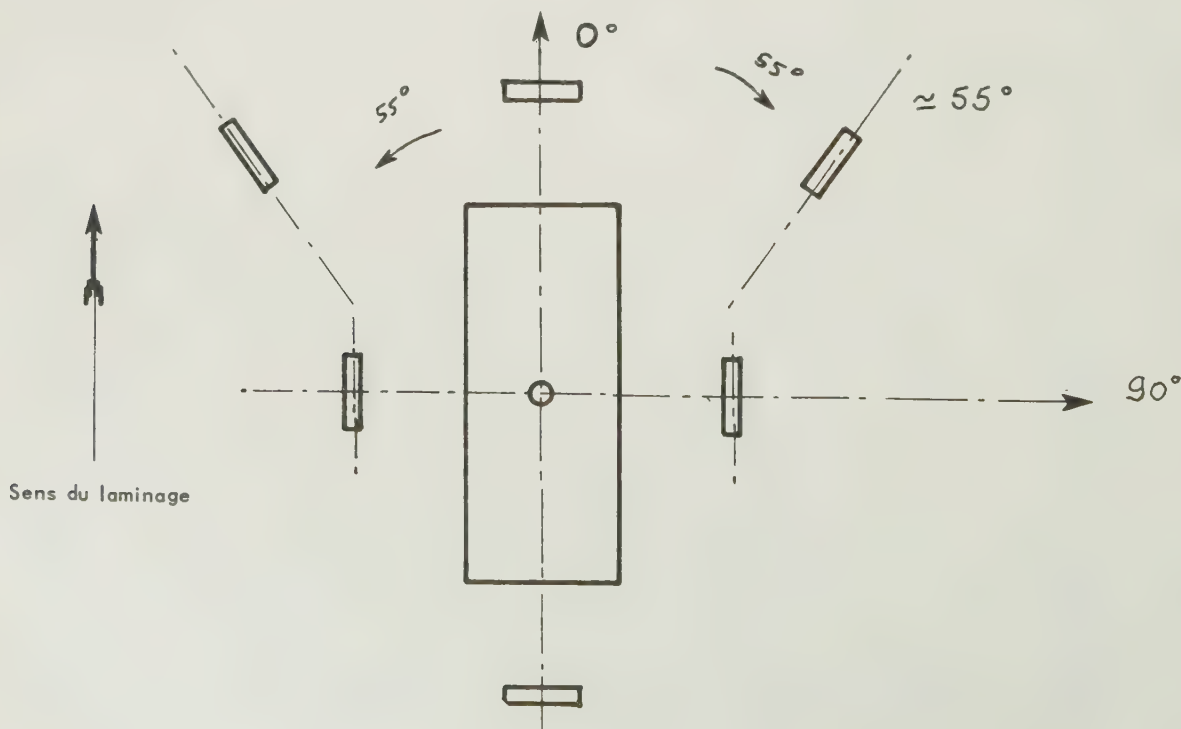
VI. CONFRONTATION THÉORIE - EXPÉRIENCE

VI.1. Détermination des paramètres d'écroutissage du matériau

Le matériau choisi est l'alliage d'aluminium AU2GN, couramment utilisé dans l'industrie aéronautique.

Nous lui avons fait subir un traitement de recuit : deux heures à 400°C suivi d'un refroidissement lent dans le four. En effet c'est celui qui assure le meilleur état initial non écroui : le matériau est considéré vierge de toutes contraintes résiduelles. De plus le traitement de trempe est en général beaucoup plus hétérogène que le traitement de recuit.

D'une même plaque d'AU2GN recuit ont été découpées, suivant le schéma ci-dessous, des éprouvettes trouées, et une série d'éprouvettes de traction dans différentes directions afin de se rendre compte de l'anisotropie du matériau.



D'après ce que nous avons remarqué en référence [15], la direction pour laquelle la courbe d'écrouissage s'écarte le plus de celle obtenue à partir d'une éprouvette prise dans la direction du laminage est environ de 50° (entre 50° et 60° d'après la référence [15]), ce que nous avons d'ailleurs constaté (fig. 1, page 24).

En contrainte, l'erreur relative entre les deux courbes extrêmes est de 3% environ dans le domaine de déformation que nous avons considéré ($\epsilon \simeq 1.10^{-2}$). Elle est de l'ordre de 8% environ en déformation.

Nous constatons donc une très faible anisotropie du matériau compte tenu des précisions expérimentales d'obtention des courbes d'écrouissage.

•

Comme la direction du chargement de l'éprouvette trouée est celle du laminage, et que les contraintes sont prépondérantes dans cette direction ($\sigma_{\theta\theta}$ important par rapport à σ_{rr} sur l'axe perpendiculaire à cette direction), nous avons utilisé la courbe d'écrouissage à 0° (voir page précédente) pour le calcul.

La relation trouvée :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{4a}{27} \sigma^3 + \frac{4b}{135} \sigma^5 + \frac{4c}{567} \sigma^7,$$

nous donne après quelques essais :

$$\begin{cases} a = - 0,1310 \cdot 10^{-5} \text{ (daN/mm}^2\text{)}^{-3} \\ b = 0,4544 \cdot 10^{-7} \text{ (daN/mm}^2\text{)}^{-5} \\ c = 0,1542 \cdot 10^{-9} \text{ (daN/mm}^2\text{)}^{-7} \end{cases}$$

Dans la figure 1, les croix représentent les points théoriques. On constate une excellente concordance entre les deux courbes d'écrouissage (0° et théorique) avec une erreur inférieure à 1% en contrainte et à 4% en déformation.

Nous rappelons les caractéristiques élastiques de l'AU2GN recuit considéré

$$\begin{cases} E = 4300 \text{ daN/mm}^2 \\ \nu = 0,335. \end{cases}$$

VI,2. Etude des conditions aux limites

VI,2.1. En élasticité

Nous avons effectué une étude photo-élastique d'une éprouvette dont successivement on agrandissait le trou.

Sur la figure 2, nous avons porté le diagramme montrant la validité de l'hypothèse H9 (champ de contraintes uniaxial à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}(0,b)$ - erreurs relatives portées en coordonnées polaires -).

Au-delà d'un trou de diamètre 10 mm cette hypothèse devient incorrecte (erreur allant jusqu'à 15% pour un trou de diamètre 15 mm).

Nous avons donc :

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\max.} = \frac{10}{45} \simeq 0,13$$

d'où le schéma de l'éprouvette (fig. 3).

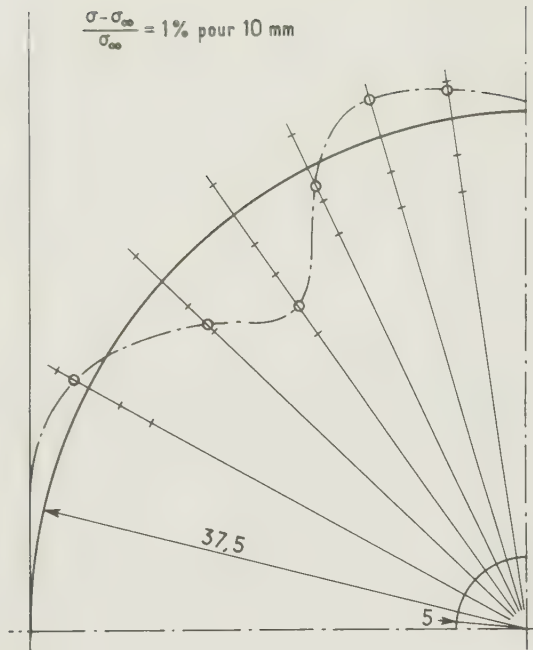


Fig. 2 - Etude photoélastique des conditions aux limites.

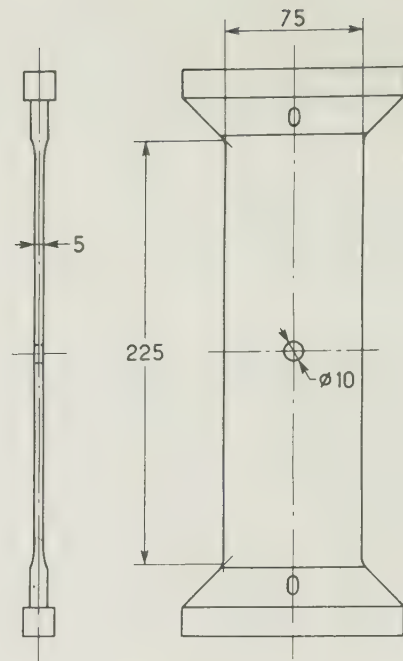
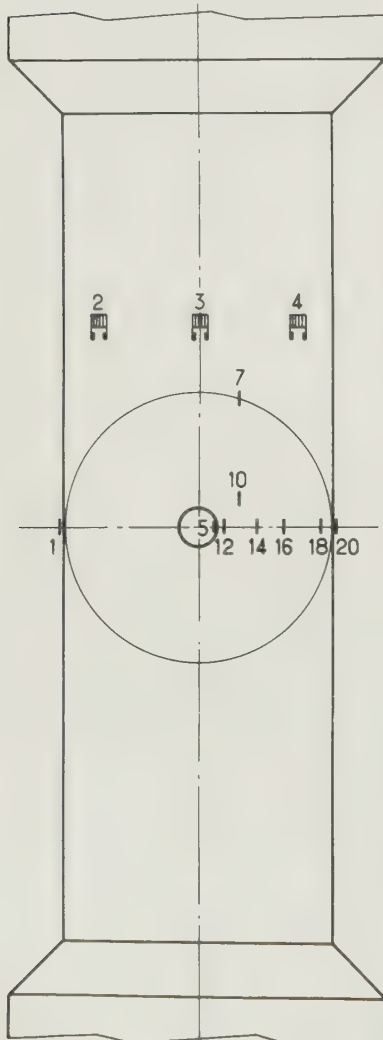


Fig. 3 - Schéma de l'éprouvette utilisée.

V,2.2. Etude des conditions aux limites en élasto-plasticité



Les mesures de déformations ont été effectuées à l'aide de jauges (fig. 4).

Les jauges numérotées (1, 2, 3, 4, 7, 20) redonnent la courbe contrainte-déformation élastique compte tenu de la déformation maximale de $1 \cdot 10^{-2}$ considérée au bord du trou pour les points les plus chargés, Autrement dit, pour ces jauges, les courbes $(\sigma_{\infty}, \epsilon_{\theta\theta \text{ local}})$ sont confondues avec les courbes $(\sigma_{\theta\theta \text{ local}}, \epsilon_{\theta\theta \text{ local}})$.

Au-delà de cette limite, nous nous sommes intéressés aux jauges n° 2, 3, 4 pour savoir si elles redonnent bien la courbe d'écrouissage du matériau. Autrement dit, si pour ces jauges, les courbes $(\sigma_{\infty}, \epsilon_{\theta\theta \text{ local}})$ sont confondues avec les courbes $(\sigma_{\theta\theta \text{ local}}, \epsilon_{\theta\theta \text{ local}})$. Elles se recouvrent exactement jusqu'aux environs de $0,7 \cdot 10^{-2}$ de déformation en ces points. Au-delà de cette valeur on atteignait la striction de l'éprouvette.

On pouvait se douter, la zone plastique étant très localisée, que les conditions aux limites sont bien vérifiées puisqu'elles l'ont été en élasticité.

Fig. 4 - Schéma d'emplacement des jauges.

VI.3. Confrontation théorie-expérience

Les expériences ont été effectuées sur une machine "T.T.C." (traction-torsion-compression) [18], sur laquelle deux éprouvettes trouées identiques ont été tirées.

Nous avons collé une jauge de déformation à l'intérieur du trou car le gradient de déformation étant élevé en plasticité et variant très rapidement le long de l'axe perpendiculaire à la direction de chargement, la mesure doit être aussi ponctuelle que possible.

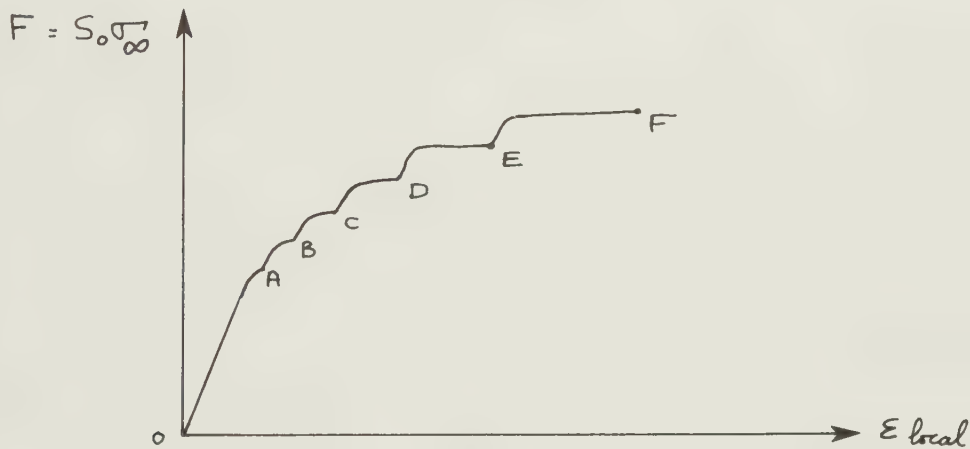
Nous verrons d'ailleurs sur les courbes de confrontation théorie-expérience représentant la force extérieure appliquée ($\sigma_{\infty} \cdot S_0$) en fonction de la déformation locale, que pour une contrainte σ_{∞} donnée :

$$\epsilon_{\text{expérimental}} < \epsilon_{\text{théorique}}$$

et ceci parce que les jauges ayant une certaine surface, elles intègrent les déformations réelles. Autrement dit, elles mesurent une valeur moyenne. Les jauges ne doivent pas être cependant trop petites afin de ne pas mesurer les déformations des grains, ce qui n'aurait pas de sens puisque nous envisageons cette étude avec un point de vue macroscopique.

L'enregistrement de la mesure de la jauge n°5 (point le plus chargé) a été visualisé sur une table traçante (x, y).

En effet, il faut faire très attention aux paliers de stabilisation présentés par les courbes contrainte-déformation en plasticité.



Dès l'atteinte de la stabilisation, on enregistrerait les informations sur une chaîne de mesure numérique (les volts étant transformés en ϵ par les formules classiques de la théorie des jauges de déformation).

Nous enregistrons donc le lieu des points A, B, C, D etc.

1. Les figures 5, 6, 7 présentent les courbes de confrontation théorie-expérience pour différentes positions de jauges :

$$\sigma_{\infty} = f(\epsilon_{\text{local}})$$

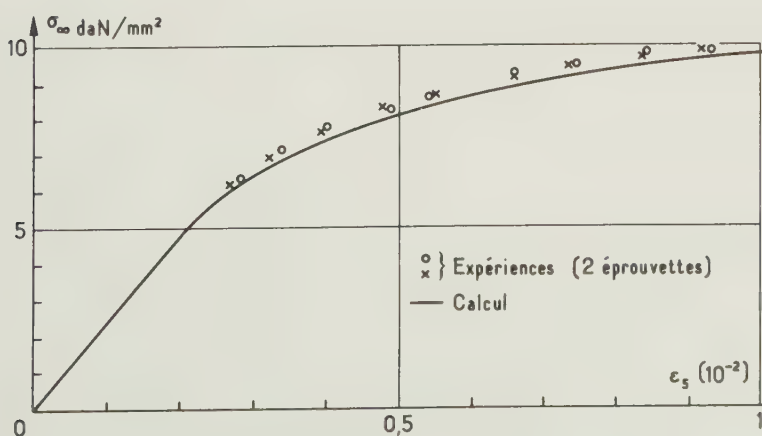


Fig. 5 - Confrontation théorie-expérience (jauge n°5).

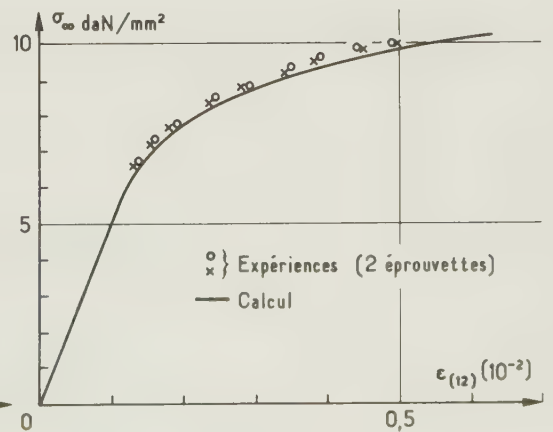


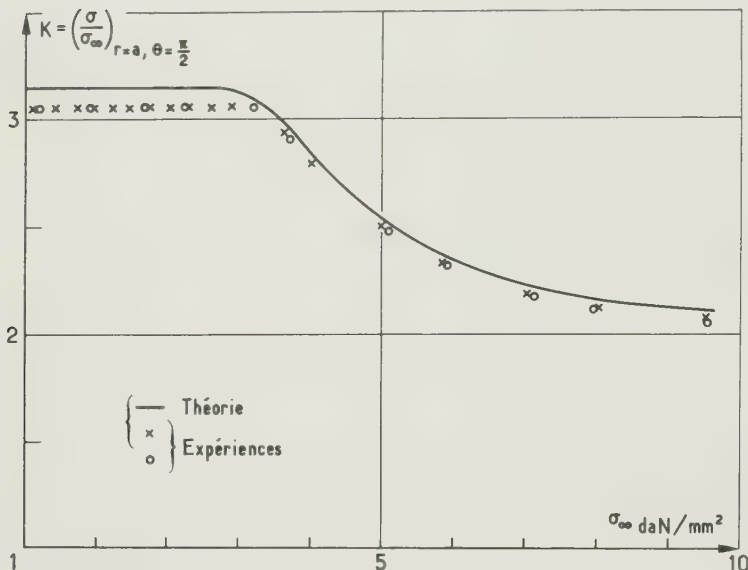
Fig. 6 - Confrontation théorie-expérience (jauge n°12).

Nous constatons que les erreurs relatives sont de l'ordre de :

- 13 % en moyenne en déformation pour l'éprouvette n° 1
- 15 % en moyenne en déformation pour l'éprouvette n° 2.

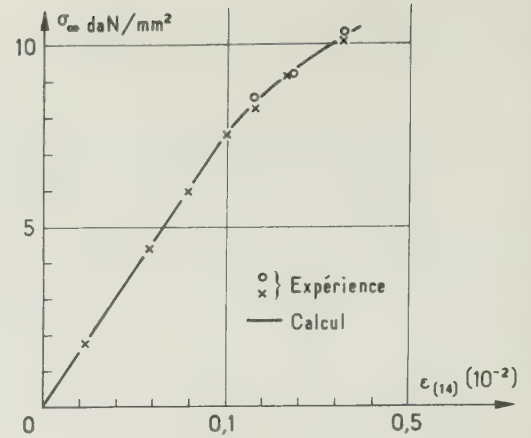
Fig. 7 - Confrontation théorie-expérience (jauge n° 14).

Fig. 8 - Evolution du facteur de concentration de contrainte.



Elastique $\left\{ \begin{array}{l} K_{\text{calculé}} \quad 3,14 \\ K_{\text{exp}} \quad 3,06 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\delta K}{K} \approx 2,6 \%$

Plastique : $\frac{\delta K}{K} \approx 2,6 \text{ à } 4 \%$



2. La figure 8 présente l'évolution du facteur K de concentration de contrainte :

$$K = \frac{(\sigma_{\theta\theta})_{a, \frac{\pi}{2}}}{\sigma_{\infty}}$$

en fonction de σ_{∞} . La valeur théorique de K élastique a été trouvée, par notre calcul, égale à 3,14. La valeur expérimentale de K a été trouvée égale à 3,06. Nous rappelons que dans le cas d'éprouvettes de dimension finie, le facteur K élastique est supérieur à 3.

Erreur relative : $\frac{\delta K}{K} = 2,6 \%$

Remarque : la valeur expérimentale peut être considérée comme bonne à 1 ou 2 % près.

En plasticité nous voyons que K décroît de 3,06 (valeur expérimentale) à ≈ 2 .

3. La figure 9 montre ensuite l'évolution

de la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de r ($r \in (a, b)$) et de σ_{∞} .

Nous obtenons donc une bonne confirmation expérimentale des valeurs prévues par le calcul.

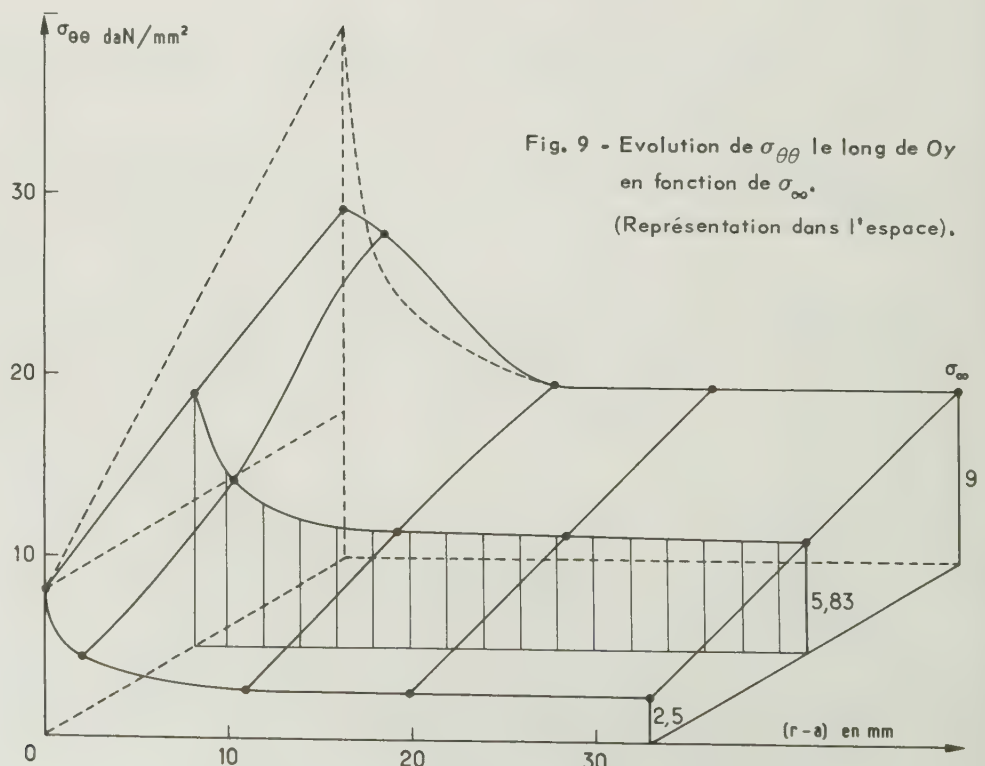


Fig. 9 - Evolution de $\sigma_{\theta\theta}$ le long de Oy en fonction de σ_{∞} . (Représentation dans l'espace).

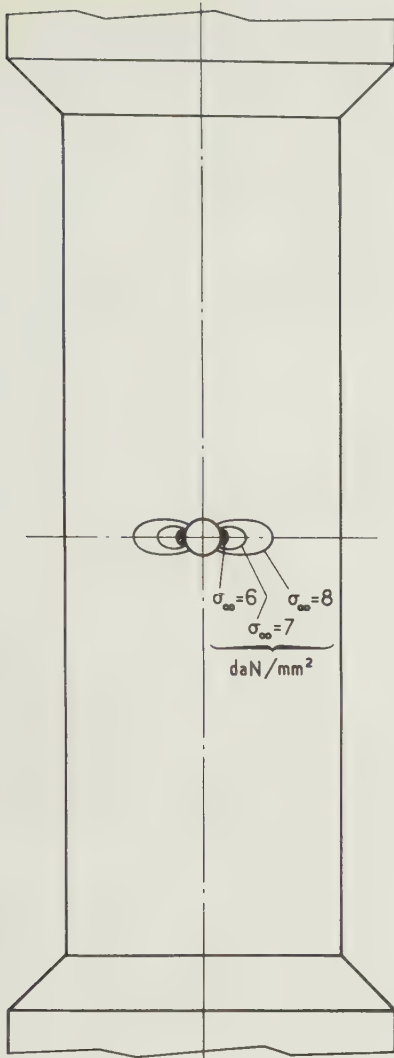


Fig. 10 - Evolution des zones plastiques théoriques.

La figure 10 montre l'évolution de la zone plastifiée en fonction de σ_{∞} (courbes théoriques et non obtenues expérimentalement) et correspondant à :

$$S_2 = k^2$$

k : seuil de plasticité conventionnel.

VI.4. Remarques :

1. En calculant la valeur de S_2 théorique en différents points, nous constatons que dans le domaine de charge considéré la zone plastique conventionnelle est très localisée.
2. Il n'y a pas eu de décharge élastique dans ces zones plastifiées au cours de l'accroissement des forces extérieures. En effet, au bord du trou par exemple, ϵ local est toujours croissant en fonction de σ_{∞} et en se reportant sur la courbe d'écrouissage du matériau

$(\sigma_{\text{local}} = f(\epsilon_{\text{local}}))$, σ_{local} croît constamment en fonction de σ_{∞} .

L'hypothèse H14 est donc cohérente avec les résultats obtenus.

•

Nous allons à présent consacrer un paragraphe spécial aux contraintes résiduelles.

VII. CONTRAINTES RÉSIDUELLES [17]

VII.1. Introduction

Lorsque l'on décharge un corps en relâchant toutes les forces extérieures agissant sur lui, il subsiste des contraintes et des déformations dites "résiduelles", ces dernières étant distinctes des déformations plastiques [17].

Le corps conserve donc après décharge une certaine énergie potentielle.

Dans le cas d'éprouvettes lisses, elles apparaissent sous forme **microscopique** : en effet, dans une éprouvette de traction simple par exemple, σ macroscopique = F/S_0 et par suite si $F = 0$ alors σ macroscopique = 0.

Dans le cas d'éprouvettes entaillées par contre, elles apparaissent sous forme macroscopique comme nous allons le montrer. En tenant compte de l'hypothèse H14, page 24, et en faisant l'hypothèse H16 : la décharge se fait entièrement dans le domaine élastique (selon une parallèle à la tangente à l'origine de la courbe d'écrouissage du matériau).

En particulier, lorsque le corps est libéré des forces extérieures agissant sur lui, les contraintes résiduelles restent dans le domaine élastique.

Nous allons en effet montrer que pour le point le plus chargé, qui nous intéresse ici, la contrainte résiduelle est une contrainte de compression. D'où la nécessité de faire cette hypothèse (que l'on trouvera cohérente avec le calcul par la suite grâce à l'hypothèse d'isotropie).

VII.2. Calcul des contraintes résiduelles

Compte tenu des hypothèses précédentes, le calcul devient très simple.

Supposons que pour une certaine valeur du paramètre de chargement : σ_{∞} , le problème élasto-plastique

ait été résolu.

Nous avons donc trouvé des champs :

$$\sigma(\sigma_\infty) \quad , \quad \mathcal{E}(\sigma_\infty)$$

tels que les équations d'équilibre, les équations de compatibilité et les conditions aux limites soient vérifiées :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\sigma) + \vec{f} = 0 \\ \sigma \vec{n} = \vec{F} \Big|_{\text{surface extérieure}} \\ \mathcal{F}\{\mathcal{E}\} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ linéaire} \\ \text{(compatibilité)} \end{array} \right. \quad \text{(équilibre)}$$

$\vec{F}$: forces surfaciques

$\vec{f}$: forces volumiques.

Déchargeons le corps jusqu'à une valeur $\tilde{\sigma}_\infty$ du paramètre de charge. Les champs $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\mathcal{E}}$ correspondants devront aussi vérifier :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\tilde{\sigma}) + \vec{\tilde{f}} = 0 \\ \tilde{\sigma} \vec{n} = \vec{\tilde{F}} \Big|_{\text{surface extérieure}} \\ \mathcal{F}\{\tilde{\mathcal{E}}\} = 0. \end{array} \right.$$

Par suite,

$$(I) - (II) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\sigma - \tilde{\sigma}) + (\vec{f} - \vec{\tilde{f}}) = 0 \\ (\sigma - \tilde{\sigma}) \cdot \vec{n} = \vec{F} - \vec{\tilde{F}} \Big|_{\text{surface extérieure.}} \\ \mathcal{F}\{\mathcal{E} - \tilde{\mathcal{E}}\} = 0 \end{array} \right. \quad (\mathcal{F} \text{ linéaire})$$

Compte tenu de l'hypothèse H16 précédente, nous voyons donc que $(\sigma(\sigma_\infty) - \tilde{\sigma}(\tilde{\sigma}_\infty))$ et $(\mathcal{E}(\sigma_\infty) - \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\sigma}_\infty))$ sont solutions (uniques) d'un problème d'élasticité (sous l'action d'une force extérieure égale à $(\sigma_\infty - \tilde{\sigma}_\infty)$).

Pour chercher les contraintes et les déformations résiduelles, faisons donc : $\tilde{\sigma}_\infty = 0$.

$$\Rightarrow \quad \sigma(\sigma_\infty) - \tilde{\sigma}(0) = \sigma^*(\sigma_\infty)$$

avec :

$$\sigma^*(\sigma_\infty) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{champs de contraintes élastiques} \\ \text{correspondant à la charge } \sigma_\infty. \end{array} \right.$$

$\sigma^*(\sigma_\infty)$ est donc un champ élastique virtuel de contraintes.

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} \tilde{\sigma}(0) &= \sigma(\sigma_\infty) - \sigma^*(\sigma_\infty) \\ \tilde{\epsilon}(0) &= \epsilon(\sigma_\infty) - \epsilon^*(\sigma_\infty) \end{aligned} \right. \right\}$$

On vérifie aisément qu'au point le plus chargé, la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ résiduelle est une contrainte de compression.

En effet :

$$\sigma^*(\sigma_\infty) = K \sigma_\infty$$

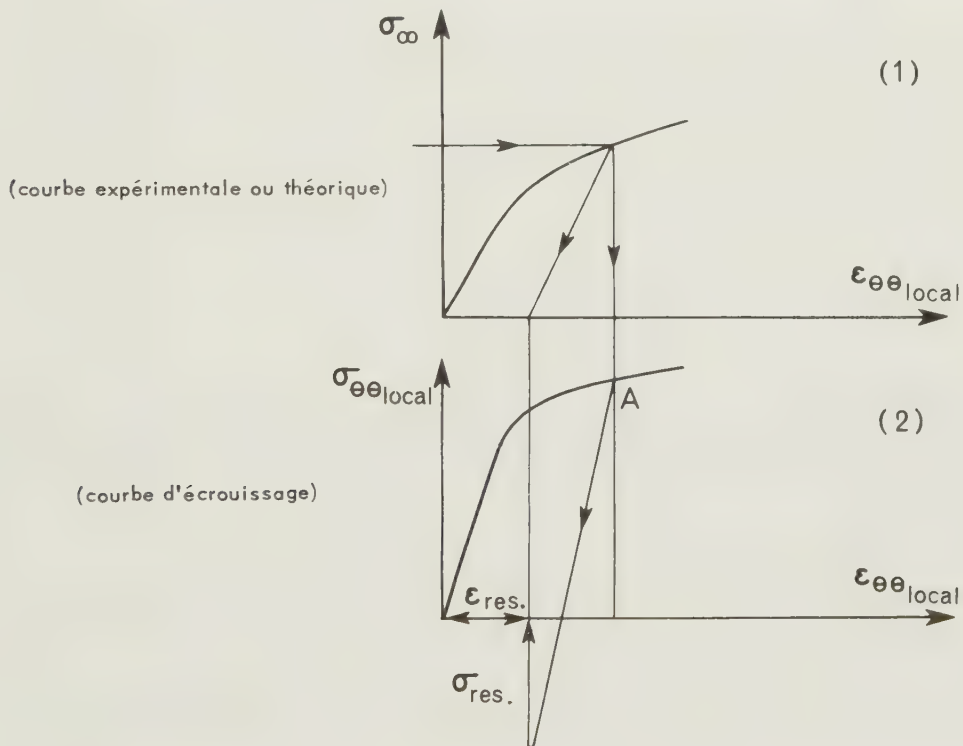
On a vu qu'en plasticité, K diminue $\Rightarrow$:

$$\sigma(\sigma_\infty) < \sigma^*(\sigma_\infty) .$$

donc :

$$\tilde{\sigma}(0) < 0 .$$

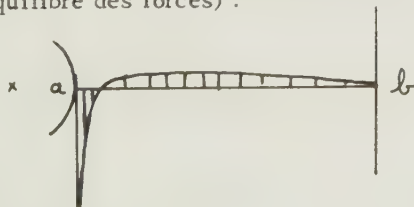
En ce point le plus chargé, **puisque le tenseur est uniaxial**, nous disposons d'une construction graphique très simple de ce calcul :



Pour un σ_∞ donné, la courbe (1) $\Rightarrow \epsilon_{\theta\theta}$ et la courbe (2) donne la contrainte résiduelle.

Remarque :

Le long de l'axe perpendiculaire à la direction du chargement, les contraintes résiduelles deviennent évidemment positives (afin de satisfaire l'équilibre des forces) :



Elles sont très prépondérantes au bord du trou.

VII,3. Résultats

Au point le plus chargé :

1^{er} retour en arrière

$$\sigma_{\infty} = 7,7 \text{ daN/mm}^2. \quad \text{En A : } \sigma_{\theta\theta} \text{ théorique} = 16,3 \text{ daN/mm}^2.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{expérience : } \sigma \text{ résiduel} = - 4,8 \text{ daN/mm}^2 \\ \text{théorie : } \sigma \text{ résiduel} = - 8 \text{ daN/mm}^2 \end{array} \right\} \frac{\delta \sigma}{\sigma} \approx 3\%.$$

2^e retour en arrière

$$\sigma_{\infty} = 9,1 \text{ daN/mm}^2. \quad \text{En A : } \sigma_{\theta\theta} \text{ théorique} = 18,3 \text{ daN/mm}^2.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{expérience : } \sigma \text{ résiduel} = - 10,5 \text{ daN/mm}^2 \\ \text{théorie : } \sigma \text{ résiduel} = - 10,4 \text{ daN/mm}^2 \end{array} \right\} \frac{\delta \sigma}{\sigma} \approx 2\%.$$

Nous constatons donc que nous atteignons la limite élastique et par suite la limite de validité du calcul.

A partir de cet instant, il faudrait refaire un calcul analogue à celui entrepris dans cette étude (chapitre V), mais en compression.

Nous noterons que le calcul va dans le sens de la sécurité (a fortiori s'il y a un effet Bauschinger).

Lors d'un chargement ondulé, nous connaissons donc à présent les limites de variations des contraintes dans les zones de concentration.



CONCLUSION

Il semble donc que la méthode de résolution employée, associée avec la loi de comportement adoptée, peut prévoir correctement l'évolution hors du domaine élastique des champs de contraintes et de déformations aux voisinages des points de concentration de contrainte. Nous obtenons en fait la solution du problème dans toute la pièce, mais nous avons vu que les zones plastifiées sont très localisées.

Il serait cependant nécessaire de procéder à des vérifications de notre étude sur d'autres cas de matériaux soumis éventuellement à d'autres traitements thermiques que celui envisagé ici.

Il serait également intéressant d'examiner le cas des cycles : dans le présent travail, l'effet Bauschinger a été négligé. Cependant, compte tenu des remarques faites à propos des questions d'isotropie, l'utilisation d'une loi isotrope pourrait peut-être donner des résultats corrects.

L'extension au cas d'éprouvettes entaillées pourrait également être envisagée en utilisant d'autres fonctions de base, par exemple coordonnées elliptiques dans le cas d'entailles elliptiques. Un passage aux fissures pourrait être tenté par la suite.

Dans le cas d'une étude de fatigue, ce travail pourrait peut-être servir à une application de théories comme par exemple celle proposée en référence [1].

D'un autre côté, il serait intéressant d'adapter la méthode des éléments finis (à l'aide des principes variationnels, énoncés en [23]) au cas de l'étude des concentrations de contraintes et de comparer les résultats des deux méthodes.



ANNEXE I

Nous avons à résoudre un système d'équations différentielles linéaires et homogènes avec conditions aux limites :

$$\frac{d\vec{u}(r)}{dr} = M(r) \cdot \vec{u}(r) \quad , \quad u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{10}.$$

Nous allons utiliser une méthode classique de résolution en remplaçant le problème aux limites par un certain nombre de problèmes avec conditions initiales.

Nous cherchons dix solutions particulières indépendantes. Pour obtenir un système fondamental de solutions, nous prendrons $\vec{u}_{initial}$ dans une base de $\mathbb{R}^{10}$.

Du fait de la linéarité du système, la solution cherchée est une combinaison linéaire de ces dix solutions particulières.

Les coefficients seront déterminés par les conditions imposées en $r = b$.

Dans le cas présent, les conditions initiales sont telles que nous n'obtiendrons que cinq solutions particulières indépendantes car :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(a) = 0 \\ u_2(a) = 0 \\ u_3(a) = 0 \\ u_4(a) = 0 \\ u_5(a) = 0 \end{array} \right.$$

Nous prendrons donc les cinq vecteurs conditions initiales suivants :

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
--	--	--	--	--

D'où cinq solutions particulières :

$$\vec{V}^{(1)}(r), \vec{V}^{(2)}(r), \vec{V}^{(3)}(r), \vec{V}^{(4)}(r), \vec{V}^{(5)}(r).$$

La solution cherchée s'écrit :

$$\vec{u}(r) = \sum_{i=1}^5 \lambda_i \vec{V}^{(i)}(r)$$

Les λ_i sont déterminés par les conditions en $r = b$.

$$\Rightarrow A\lambda = l \quad \text{avec} \quad l = \begin{bmatrix} b\sigma_{\infty} \\ -\frac{b^2}{2}\sigma_{\infty} \\ -b\sigma_{\infty} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A : matrice formée par les cinq premières composantes des solutions particulières prises pour $r = b$.

Si A est inversible, alors le problème aux limites est remplacé par un problème avec conditions initiales.

Remarque :

Comme la résolution a été effectuée sur un ordinateur (IBM 360-50), pour des questions d'encombrement de mémoires, nous ne voulions pas conserver les valeurs des solutions particulières pour tout $r \in [a, b]$.

Aussi, nous nous sommes servis du théorème suivant [19] : la solution de l'équation différentielle $d\vec{u}/dr = M(r) \cdot \vec{u}(r)$ qui prend pour $r = a$ la valeur $\vec{u}_a$ est égale à $R(r, a) \cdot \vec{u}_a$ où $R(r, a)$ est la résolvante de l'équation ($R(a, a) = 1$).

On utilise donc la linéarité de la solution par rapport aux conditions initiales pour remarquer que le vecteur de composantes :

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad \lambda_5]$$

constitue la véritable condition initiale pour la vraie solution $\vec{u}(r)$.

Ainsi on entreprend un sixième calcul analogue aux précédents et nous n'avons pas besoin de garder en mémoire machine tous les $\vec{V}^{(i)}(r)$.

•

En élasto-plasticité, à chaque pas en force, nous avons donc à résoudre six équations différentielles et à effectuer l'inversion d'une matrice d'ordre 5.

On a appliqué les techniques usuelles numériques d'inversion et d'intégration [20].

*

ANNEXE II

Soit $\mathcal{F}^p$, l'ensemble des fonctions f définies, continues sur $[0, \Sigma] \subset \mathbb{R}^+$:

$f : [0, \Sigma] \longrightarrow \mathbb{R}$, telles que $f(0) = 0$. Alors $\forall f \in \mathcal{F}^p$, $\forall \chi$ réel positif, il existe un polynome :

$$R(\sigma) = a_1 \sigma^3 + \dots + a_n \sigma^{2n+1} \quad \left(\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ a_i \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

tel que :

$$\begin{aligned} & \| R - f \| < \chi \\ \left(\| R - f \| = \sup_{\sigma \in [0, \Sigma]} |R(\sigma) - f(\sigma)| \right) . \end{aligned}$$

•

Démonstration :

$$f(\sigma) \text{ continue : } \forall \chi, \exists \eta : |\sigma| \leq \eta \Rightarrow |f(\sigma)| \leq \frac{\chi}{4}$$

Considérons la fonction : $\tilde{g} : [0, \Sigma^2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\text{telle que : } \tilde{g}(\sigma^2) = \begin{cases} \tilde{g}(\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{\eta^2} g(\eta^2) = \frac{\sigma^2}{\eta^3} f(\eta) & \text{pour } 0 \leq \sigma^2 \leq \eta^2 \\ g(\sigma^2) = \frac{f(\sigma)}{\sigma} & \text{pour } \sigma^2 \geq \eta^2 \end{cases}$$

$$\tilde{g} \text{ est continue sur } [0, \Sigma^2] , \quad \tilde{g}(0) = 0 .$$

$\Rightarrow$

D'après le théorème d'approximation polynomiale de Stone-Weierstrass :

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}^+ , \quad \exists \text{ un polynome en } \sigma^2 : Q(\sigma^2)$$

$$\text{tel que : } \| Q - \tilde{g} \| \leq \frac{\zeta}{2}$$

$$\text{Construisons le polynome : } P(\sigma^2) = Q(\sigma^2) - Q(0)$$

$$\Rightarrow \| P - \tilde{g} \| \leq \zeta \quad \text{et} \quad P(0) = 0 .$$

En effet : $P - \tilde{g} = (P - Q) + (Q - \tilde{g}) = Q(0) + (Q - \tilde{g})$,

$$\Rightarrow \|P - \tilde{g}\| \leq \|Q(0)\| + \|Q - \tilde{g}\| \leq \gamma$$

Le premier terme du membre de droite de l'inégalité précédente résulte de : $\|Q - \tilde{g}\| < \frac{\gamma}{2}$
pris pour $\sigma^2 = 0$.

I.

Sur $[\eta, \Sigma]$: $|P(\sigma^2) - \tilde{g}(\sigma^2)| = |P(\sigma^2) - \frac{f(\sigma)}{\sigma}| \leq \gamma$

$$\Rightarrow |\sigma P(\sigma^2) - f(\sigma)| \leq \gamma \Sigma$$

II.

Sur $[0, \eta]$:

Formons :

$$|\sigma P(\sigma^2) - f(\sigma)| \leq \sigma |P(\sigma^2) - \tilde{g}(\sigma^2)| + \sigma |\tilde{g}(\sigma^2)| + |f(\sigma)|$$

1^{er} terme du second membre de l'inégalité :

$$\sigma |P(\sigma^2) - \tilde{g}(\sigma^2)| \leq \gamma \eta \quad \text{pour } 0 \leq \sigma \leq \eta$$

2^{ème} terme : $\sigma |\tilde{g}(\sigma^2)| = \sigma^3 \left| \frac{g(\eta^2)}{\eta^2} \right| = \frac{\sigma^3}{\eta^3} |f(\eta)|$

$$\Rightarrow \sigma |\tilde{g}(\sigma^2)| \leq |f(\eta)| \leq \frac{\chi}{4}$$

3^{ème} terme : $|f(\sigma)| \leq \frac{\chi}{4} \quad (\text{continuité de } f)$

D'où : $|\sigma P(\sigma^2) - f(\sigma)| \leq \gamma \eta + \frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{4} = \gamma \eta + \frac{\chi}{2}$,

Choisissons γ tel que :

$$\begin{cases} \gamma \eta \leq \frac{\chi}{2} & (\text{cas I}) \\ \gamma \Sigma \leq \chi & (\text{cas II}) \end{cases}$$

par exemple : $\gamma = \inf \left(\frac{\chi}{2\eta}, \frac{\chi}{\Sigma} \right)$

$\Rightarrow$ Le polynôme $R = \sigma P(\sigma^2)$ répond à la question sur $[0, \Sigma]$:

$$|\sigma P(\sigma^2) - f(\sigma)| < \chi.$$



RÉFÉRENCES

- [1] NOPPE J.M. – *Modèle plastique de fatigue en chargement de traction-compression*. Note Technique O.N.E.R.A., n° 178 (1971).
- [2] MUSKHELISHVILI N.I. – *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity* - Noordhoff Ltd. 1953.
- [3] SOLOMON – *Elasticité linéaire*- Masson 1968.
- [4] CHEREPANOV G.P. – *On a method of solving the elasto-plastic problem*. PMM vol. 27, No. 3, (1963).
- [5] CHEREPANOV G.P. – *Some problems of elasticity theory and plasticity theory with unknown boundary*. PMM vol. 28, No. 1, (1964), p. 141-145.
- [6] SAVIN G.N. – *Stress distribution around holes*. N.A.S.A. TT F-607, (1970), p. 440-511.
- [7] STOWELL E.Z. – *Stress and strain concentration at a circular hole in an infinite plate*. N.A.C.A. TN 2073, (1950).
- [8] HARDRATH H.F. and OHMAN L. – *A study of elastic and plastic stress concentration factors due to notches and fillets in flat plates*. N.A.C.A. TN 2566, (1951).
- [9] CREWS – *Local plastic stress in sheet aluminium alloy specimens with stress concentration factor of 2 under constant amplitude loading*. N.A.S.A. TN D-3152, (1965).
- [10] NEUBER H. – *Theory of notch stresses*.
- [11] BUDIANSKY B. and VIDENSEK R.J. – *Analysis of stresses in the plastic range around a circular hole in a plate subjected to uniaxial tension*. N.A.C.A. TN 3542, (1955).
- [12] GERMAIN P. – *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1962.
- [13] MANDEL J. – *Cours de mécanique des milieux continus*, Tomes I et II, Gauthier-Villars, 1966.
- [14] MAZET R. – *Sur la normalité de la fonction de fluage lors d'essais de traction d'un dural à 200°C*. Symposium I.U.T.A.M. sur la thermo-inélasticité. Glasgow, juin 1968.
- [15] MORCHOISNE Y. – *Contribution à l'étude de l'écrouissage des matériaux métalliques*. Note Technique O.N.E.R.A. n° 158 (1970).
- [16] BUDIANSKY B. – *A reassessment of deformation theories of plasticity*. A.S.M.E., nov.-déc. (1958).
- [17] ILIOUCHINE A.A. – *Plasticité*. Eyrolles, 1956.
- [18] LEMAITRE J., EHRET J., POLICELLA H. et RIVIÈRE C. – *Une machine de traction-torsion-compression*. Revue Française Mécanique, n° 28 (1968) p. 25-32.
- [19] CARTAN H. – *Calcul différentiel*. Tome I, Hermann, 1967.
- [20] RALSTON, WILF – *Méthodes mathématiques pour calculateurs arithmétiques*. Dunod, 1965.
- [21] OLSZAK W., MROZ Z. and PERZYNA P. – *Recent trends in the development of the theory of plasticity*. Pergamon Press, 1960.
- [22] VALID R. – *La théorie linéaire des coques et son application aux calculs hors du domaine élastique*. Publication O.N.E.R.A. (à paraître).
- [23] WASHIZU K. – *Variational methods in elasticity and plasticity*. Pergamon Press, 1968.



FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

PERMIS D'IMPRIMER

Doctorat INGENIEUR

Thèse de SCIENCES PHYSIQUES

Nom OHAYON

Prénoms Roger Jean

Date et lieu de naissance 3 Janvier 1942 à MEKNES (Maroc)

SUJETS :

1^{re} Thèse : " Etude du problème de la plaque trouée pour un matériau de type élasto-plastique à écrouissage non linéaire".

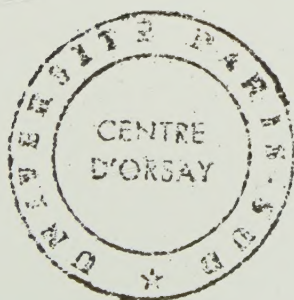
2^e Thèse : (Propositions données par la Faculté)

Vu et approuvé :

Orsay, le 4 Juin 1971

~~Le Président de la Faculté des Sciences d'Orsay~~

LE VICE-PRESIDENT DU CENTRE D'ORSAY:



Handwritten signature: J. Benbers

